OSCILAȚII PARAMETRICE ARMONICE ÎNTR-UN MEDIU REZISTENT

Conf.univ.dr. Țopa Mihai
Student Gumen Victor

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: В статье исследуется возможность сохранения амплитуды колебаний маятника в среде, оказывающей сопротивление, которое линейно зависит от скорости

1.Introducere

Oscilațiile unui pendul intr-un mediu ce opune rezistență liniară proporțională vitezei pot avea amplitudine constantă.

2.Conținutul lucrarii

Vom studia oscilațiile unui pendul în cîmpul omogen al forței de greutate și al forței de rezistență a mediului considerată direct proporționala cu viteza $R = \frac{m\nu}{l} \cdot \upsilon$, unde m - masa pendulului, l - lungimea lui, $\nu = 0.5\ m/s$ – o constatnă și υ – viteza.

Ecuația diferențială a mișcarii pendulului:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi - m\nu\dot{\varphi}, \tag{1}$$

sau $\ddot{\varphi} + 2\eta\dot{\varphi} + \kappa^2\varphi = 0$, unde am considerat oscilațiile mici încît $\sin\varphi = \varphi$ și am notat $\eta = \frac{\nu}{2l}, \frac{g}{l} = \kappa^2$.

Ecuația caracteristică are rădăcinile $\lambda_{1,2} = -\eta \pm ix$, unde $x = \sqrt{\kappa^2 - \eta^2}$. Fie datele sistemului $l = 2\ m, g = 10\ m/s^2$. Obținem $\eta = 0{,}125\ s^{-1}, \kappa = \sqrt{5} \cong 2{,}236\ s^{-1}, x = 2{,}233\ s^{-1}$.

Soluție generală:
$\varphi = Ae^{-\eta t}\sin(xt + \alpha)$ și derivata ei $\dot{\varphi} = Ae^{-\eta t}[-\eta\sin(xt + \alpha) + x\cos(xt + \alpha)]$.

Fie condițiile inițiale $t_0 = 0, \varphi_0 = 0, \dot{\varphi_0} = 0{,}4\ s^{-1}$ rezulta $\alpha = 0, A = 0{,}1791\ rad$. În primă poziție de abatere maximă $\varphi_1 = 0{,}1791e^{-0{,}125\,t_1} \cdot \sin 2{,}233t_1$,

$\dot{\varphi_1} = 0{,}1791e^{-0{,}125\,t_1}[-0{,}125\sin 2{,}223t_1 + 2{,}233\cos 2{,}233t_1] = 0$, obținem $t_1 = 0{,}6785\ s$, $\varphi_1 = 0{,}1643\ rad$. Din această poziție lungimea pendulului crește brusc încît centrul lui de greutate cade vertical pe o distanța $d = 0{,}1\ m$ în timp de $0{,}1423\ s$, căpătînd lungime $l = 2{,}0987\ m$ și obținînd viteza $\upsilon_2 = 0{,}2179\ m/s$ și viteza unghiulară $\dot{\varphi_2} = 0{,}1038\ s^{-1}$. Poziția pendulului se determină cu unghiul $\varphi_2 = 0{,}1565\ rad$. Mișcarea pendulului din această poziție pînă în poziția 3 verticală este descrisă de ecuația diferențială:

$$\ddot{\varphi} + 2\eta_1\dot{\varphi} + {\kappa_1}^2\varphi = 0, \tag{2}$$

unde: $\eta_1 = \frac{1}{4l_1} = 0{,}1191\ s^{-1}, x_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}} = 2{,}1829\ s^{-1}$.

Soluția general a ecuației diferențiale (2) este $\varphi = Be^{-\eta_1 t}\sin(x_1 t + \beta)$.

Acum determinăm legea mișcarii folosînd condițiile inițiale $t_2 = 0{,}8208\ s, \varphi_2 = 0{,}1565\ rad, \dot{\varphi_2} = -0{,}1038\ s^{-1}$. Obținem

$\beta = -3{,}1151\ rad, B = -0{,}1779\ rad$.

$\varphi = 0{,}1833e^{-0{,}1191t}\sin(2{,}1829t + \beta)$,

$\dot{\varphi} = 0{,}1833e^{-0{,}1191t}[-0{,}1191\sin(2{,}1829t+\beta) + 2{,}1829\cos(2{,}1829t+\beta)]$

În poziția 3 $\varphi_3 = 0$ rezultă $t_3 = 1{,}4292\ s, \dot{\varphi}_3 = -0{,}3271\ s^{-1}$.

Conform teoremei momentului cantității de mișcare în raport cu punctul de suspensie a pendulului și ținînd seamă ca momentul forțelor ce acționeaza asupra pendulului în raport cu punctul de suspensie este nul avem:

$$l_1{}^2\dot{\varphi}_3 = (l_1 - d_1)^2\dot{\varphi}_4 \quad (3)$$

Viteza unghiulara $\dot{\varphi}_4 = \dot{\varphi}_3(\frac{l_1}{l_1-d_1})^2 = -0{,}3271(\frac{2{,}0987}{2{,}0987-0{,}24})^2 = -0{,}4170\ s^{-1}$.

Mișcarea ulterioară a pendulului este descrisă de rezultatele prezentate în tabel.

Tabelul nr.1 Rezultatele mișcarii ulterioare a pendulului

Numărul pozitiei	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ_i, rad	0	0,1643	0,1565	0	0	- 0,1647	- 0,1563	0	0	0,1644
$\dot{\varphi}_i, rad/s$	0,4	0	- 0,1038	- 0,3271	- 0,4170	0	0,1107	0,3270	0,4400	0
l_i, m	2	2	2,0987	2,0987	1,8587	1,8587	1,9574	1,9574	1,6874	1,6874
$\Delta l_i, m$	0	0	0,0987	0,0987	-0,24	-0,24	0,0987	0,0987	-0,27	-0,27
t_i, s	0	0,6785	0,8208	1,4292	1,4292	2,0825	2,2248	2,8093	2,8093	3,4359

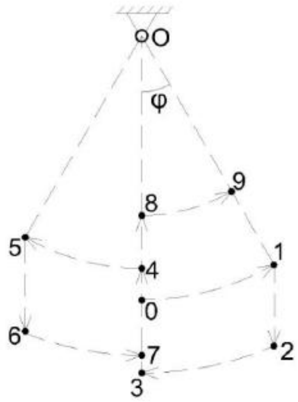

Fig.1 Oscilațiile pendulului a cărui lungime poate fi variata lungind și scurtînd firul

Am studiat oscilațiile unui pendul a cărui lungime poate fi variată, lungind și scurtînd firul. În momentul cînd firul ocupă poziția de abatere maximă de la verticală el este alungit instantaneu astfel încît capătul interior al firului, adică bila cade pe verticală, parcurgînd o distanță $d = 0{,}1\ m, d \ll l$. Ajungînd în poziția verticală firul este scurtat cu $d_1 > d$, apoi urmeaza o scurtare$d_2 > d_1$, dar iarăși în poziția verticală. Pe parcursul unei perioade pendulul va fi de două ori lungit și de două ori scurtat. Deoarece pendulul oscilează intr-un mediu ce opune rezistență proporțională vitezei si daca lungimea pendulului ar rămîne constantă oscilațiile ar amortiza. Pentru a pastra amplitudine este necesar de a efectua lucru mecanic contra forței de greutate scurtînd firul. Scurtînd periodic lungimea pendulului compensăm pierderile de energie cauzate de mediu rezistent și astfel oscilațiile devin neamortizate.

Concluzie: Oscilațiile parametrice apar odată cu schimbarea poziției relative a centrului de greutate al pendulului. Variația cu o anumită frecvență, fază și mărime a lungimii pendulului compensează pierderile de energie cazuată de rezistența mediului și face ca oscilațiile pendulului sa fie armonice.

Bibliografie:

1. Caraganciu V., Colpagiu M., Țopa M. Mecanica teoretica. Editura "Știința", Chișinău, 1994, 441p.
2. Țopa M., Sultan M. Studiu privind amplificarea oscilațiilor parametrice. Conferința tehnico-științifica a colaboratorilor, doctoranților și studenților, UTM, Chișinau, 2012, vol II, 2p.
3. Ландау Л., Ахиезер А., Лифишц Е., Курс общей физики. «Наука», М:1969, 400с.