CURBE ÎNRUDITE CU CICLOIDA. PROPRIETĂŢI ŞI APLICAŢII

Andrei VALENTIN, Bacota TATIANA, Aurica POPESCU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract : *În această lucrare s-au investigat curbele înrudite cu cicloida : Epicicloida, Hipocicloida şi Cardioida. Se investighează şi proprietăţile curbelor, cum ar fi : ecuaţiile parametrice, aria şi lungimea lor. Epicicloidele, Hipocicloidele şi Cardioidele au multiple aplicaţii în viaţă, adesea ele pot fi observate în arenele sportive. Nu este o excepţie utilizarea lor în procesele mecanice.*

Cuvinte cheie : *Curbă, formulă, cuspidă, proprietăţi, rază.*

1. Cicloida

Cicloida este curba descrisă de un punct al unui cerc cînd acesta se rostogoleşte fără alunecare pe o dreaptă, numită bază.

Cicloida este soluţia problemei brahistocrone (adică este curba celei mai rapide descendenţe sub acţiunea forţei gravitaţionale) şi a problemei tautocrone (adică perioada de timp în care o bilă care se rostogoleşte în interiorul ei înainte şi înapoi nu depinde de poziţia iniţială a bilei).

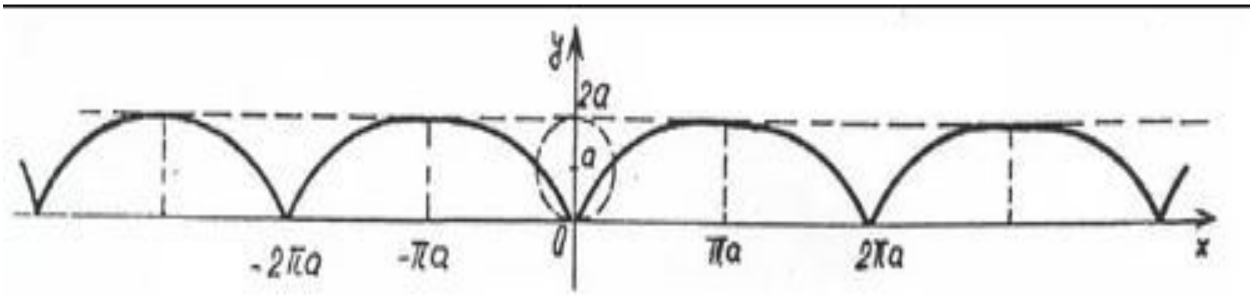


Fig.1 Primul si al doilea arc al cicloidei la rotirea cercului de raza ”a”

Cicloida care trece prin origine, creată de un cerc cu raza r, este formată din punctele (x,y) cu ecuatiile parametrice:

x = r (t-sint)
y = r (1- cos t)
cu $0 \leq t \geq 2\pi$

1.Aria

$A= \int_0^{2\pi} ydx = r^2 \int_0^{2\pi}(1-cost)^2dt = r^2(\frac{3}{2}t\text{-}2sint+\frac{1}{2}costsint) = 3\pi r^2$

2.Lungimea unui arc al cicloidei:

$L=\int_{t1}^{t2} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-cost)^2+sin^2t}\, dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2cost}\, dt = 8r$

2. Epicicloida

Se numeşte epicicloidă o curbă descrisă de un punct M al unui cerc ce se rostogoleşte fără alunecare pe partea exterioară a unui cerc fix. (Fig.2)

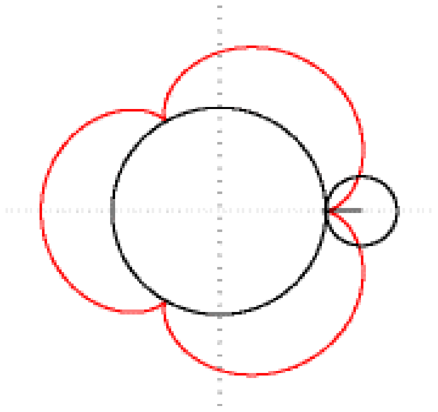


Fig. 2

Curba roşie este o epicicloidă trasată în timp ce cercul mic (r = 1) se rostogoleşte pe exteriorul cercului mare (R = 3).

Dacă cercul mai mic are raza r, iar cercul mai mare are raza $R = kr$, atunci ecuațiile parametricepentru curbă sunt:

$$x(\theta) = r(k+1)\left(\cos\theta - \frac{\cos((k+1)\theta)}{k+1}\right) \qquad (1.1)$$

$$y(\theta) = r(k+1)\left(\sin\theta - \frac{\sin((k+1)\theta)}{k+1}\right) \qquad (1.2)$$

Dacă k este întreg, atunci curba este închisă și are k cuspide.
Dacă k este număr rațional, adică $k = p/q$, atunci curba are p cuspide.
Dacă k este număr irațional, atunci curba nu se închide niciodată și umple spațiul din cercul mare cu excepția unui disc de rază $R - r$ în centrul cercului mare.

Exemple de Epicicloidă : cu 2 cuspide (Fig.3a) , cu 3 cuspide (Fig.3b), cu 4 cuspide (Fig.3c)

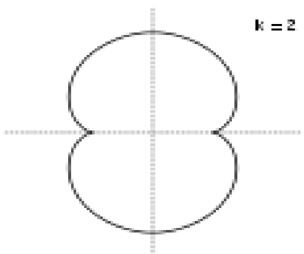


Fig. 3a

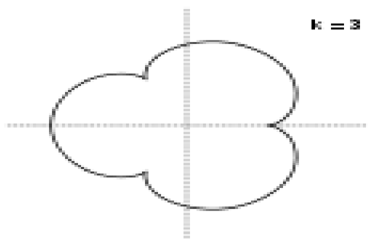


Fig. 3b

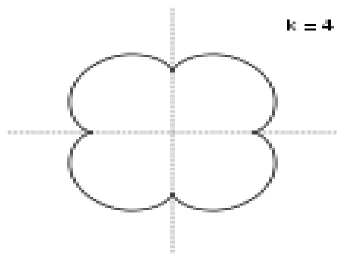
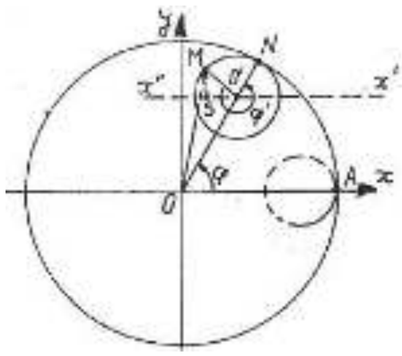


Fig. 3c

3. Hipocicloida

În geometrie, o **hipocicloidă** este o curbă plană trasată de un punct fixat pe un cerc care se rostogolește în interiorul altui cerc mai mare. (Fig.4)



Dacă cercul mai mic are raza *r*, iar cercul mai mare are raza $R = kr$, atunci ecuațiile parametrice pentru curbă sunt date de :

$$X = r\,(k\text{-}1)\ \left(\cos t + \frac{\cos((k-1)t)}{k-1}\right)$$

$$Y = r\,(k\text{-}1)\ \left(\sin t - \frac{\sin((k-1)t)}{k-1}\right)$$

Fig. 4

Hipocicloida este un caz particular de hipotrohoidă, care este un caz particular de ruletă.
O hipocicloidă cu trei cuspide se numește deltoidă (Fig.5a). O hipocicloidă cu patru cuspide se numește astroidă. (Fig.5b)

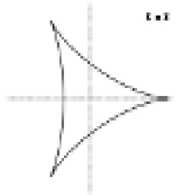


Fig. 5a

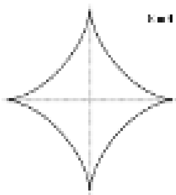


Fig. 5b

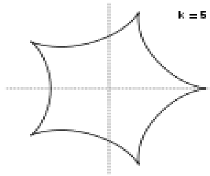


Fig. 5c

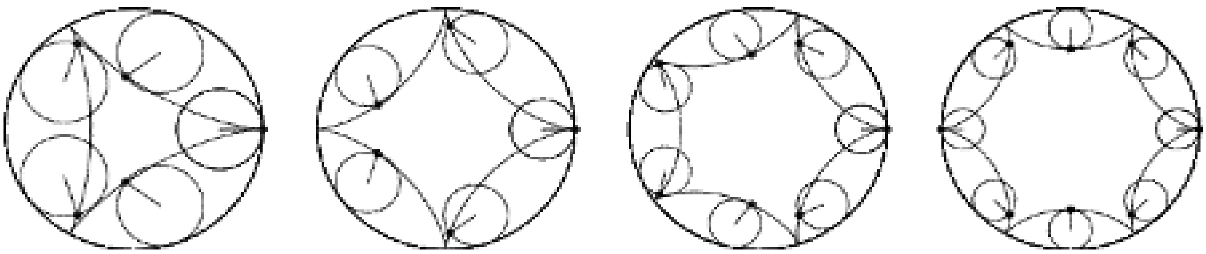


Fig. 6 Reprezentarea procesului de rostogolire fără alunecare

Daca puctul M nu este pe circumferinta cercului care se rostogoleste, ci in exteriorul acestui cerc , curba obtinuta prin rostogolire fara alunecare este o hipocicloida alungita.

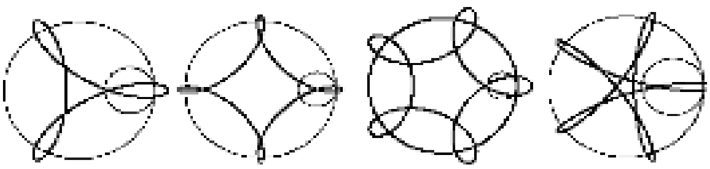


Fig. 7 Hipocicloidă alungită

Daca punctul este n interiorul cercului se va primi hipocicloida scurtata.

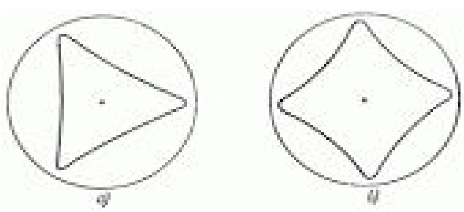
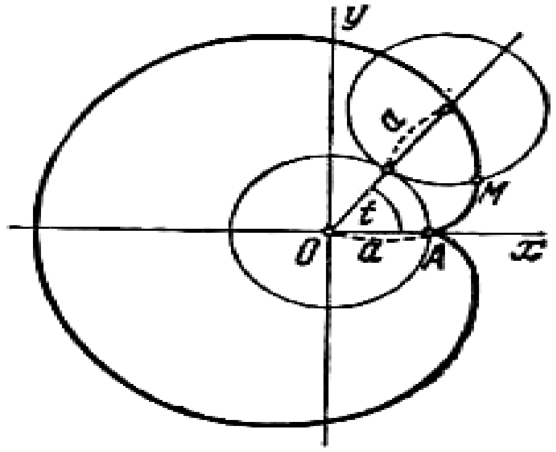


Fig. 8 Hipocicloidă scurtată

4. **Cardioida**

În geometrie, cardioida este o epicicloidă cu o cuspidă. **Cardioida** este o curbă plană descrisă de un punct de pe un cerc ce se rostogolește, fără alunecare, pe un alt cerc exterior și de aceeași rază. (Fig.9)



Dacă se consideră **a = b** în reprezentarea parametrică a Epicicloidei, se obține reprezentarea parametrică a Cardioidei :

$x = \alpha(2\cos \varphi - \cos 2\varphi)$
$y = \alpha(2\sin \varphi - \sin 2\varphi)$

Fig.9

Ecuația carteziană este:

$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2 (x^2 + y^2)$, unde *a* este diametrul cercului mobil.

1. Aria figurii mărginită de cardioidă:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\, 2 \int_0^{\pi} a^2 (1-\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2 \qquad (1.3)$$

2.Lungimea cardioidei:

$$\frac{1}{2}L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + [r(\acute{\varphi})]^2} d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\, d\varphi = 4a \qquad (1.4)$$

L=2(4a)=8a

Aplicații

Diverse aplicatii tehnice , radio si telecomunicatii:

- Canale de drenare bazate pe proprietatile de brahistocronocitate si tautocronicitate;

In constructii, argitectura si design:

-Arene sportive;
-Pistele sporturilor de iarna;
-Podurile sălilor de concert, amfiteatrelor, ect.

In mecanica:

- Diverse profiluri ale rotilor dintate pentru asigurarea miscarilor line;
- Mecanisme precise precum ceasul;
- Mecanisme de transformarea miscarii de rotatie in miscare de translatie;

Bibliografie

1. Ch. D. Ionescu “ *Teoriia diferențială a curbelor și suprafețelor cu aplicații tehnice*.
2. Ghatak, A & Mahadevan, L. *Crack street: the cycloidal wake of a cylinder tearing through a sheet,* Physical Review Letters, 91 ,2003.
3. Weisstein , Eric , *Cicloidă,* 25 martie 2005.