DISTANŢA DINTRE DOUĂ PUNCTE PE SFERĂ

Nicoleta JITARU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *The paper studies the problem of computing the distance between two points on the Earth globe surface. For this purpose the spherical coordinates are used, which represent also the geographical coordinates for this surface. The paper also shows the relationship between the spherical and cartesian coordinates. An algorithm is elaborated using vectors, which computes the distance between any two points on the surface of a sphere, therefore also on the surface of the Earth globe. A computer program is developed as well to help do all the necessary calculations.*

Cuvinte cheie: *coordonate sferice şi geografice; produsul scalar.*

Funcţia oricărui sistem de coordonate este de a determina poziţia oricărui punct din plan sau din spaţiu prin două sau trei numere. În geografie aceste coordonate sunt latitudinea şi longitudinea, cu ajotorul cărora poziţia oricărui punct de pe suprafaţa Pământului se determină în mod unic.

Sistemul cartezian de coordonate, introdus de savantul francez R. Decart (Rene Descartes, 1596 – 1650) în sec. XVII, a însemnat, pentru matematică, începutul unei noi etape de dezvoltare. Fiind foarte simplu, acest sistem este cunoscut astăzi oricărui elev de gimnaziu. Ideea de bază a sistemului a fost determinarea oricărui punct din plan printr-o pereche ordonată de numere reale. Astfel, studiul multor obiecte de natură geometrică a fost redus la studiul unor noţiuni pur algebrice şi invers.

În acelaşi timp, există un şir de probleme, inclusiv în matematică, pentru rezolvarea cărora sistemul cartezian este incomod, greoi sau chiar inaplicabil. De exemplu, una din liniile, cunoscute încă de grecii antici, *spirala lui Arhimede*, nu mai poate fi studiată printr-o ecuaţie în sistemul cartezian. În asemenea cazuri se apelează la un alt sistem de coordonate – sistemul polar, care vine să-l completeze pe cel cartezian. O generalizare a sistemului cartezian îl prezintă *sistemul afin* de coordonate.

Sistemul cartezian de coordonate este elaborat şi pentru spaţiu şi constă deja din trei axe OX, OY şi OZ. Şi în acest caz el nu este unicul sistem de coordonate. În funcţie de necesitate, se mai folosesc *coordonatele cilindrice* şi *coordonatele sferice*.

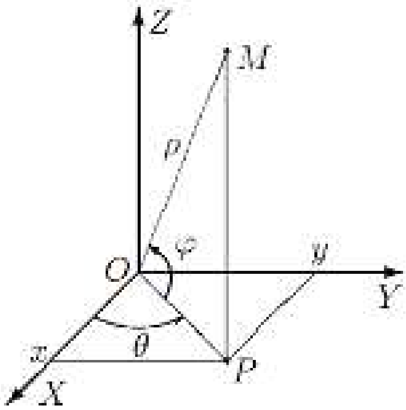

Fig. 1.

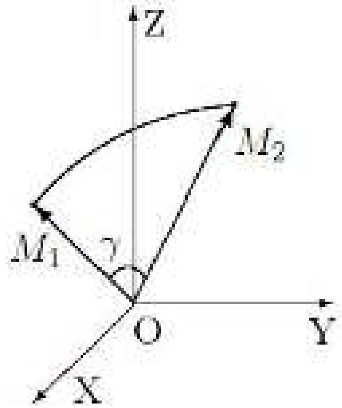

Fig. 2.

Coordonatele sferice. Fie *M(x,y,z)* un punct arbitrar din sistemul cartezian *OXYZ* şi *P* proiecţia lui pe planul *XOY*. Poziţia punctului *P* poate fi determinată şi de alte trei numere: ρ, θ şi φ. În acest caz, $\rho = OM$, θ este unghiul dintre segmentul *OP* şi axa *OX,* iar φ este unghiul dintre *OM* şi planul *XOY* (Fig. 1). Numerele ρ, θ, φ constituie *coordonatele sferice* ale punctului *M: M(*ρ, θ, φ*)*. Legătura dintre coor-donatele carteziene şi cele sferice se stabileşte cu uşurinţă:

$x = \rho \cos\varphi \cos\theta,\ y = \rho \cos\varphi \sin\theta,\ z = \rho \sin\varphi.$ (1)

Ca şi coordonatele cilindrice, cele sferice îşi au domeniul lor de aplicaţie. Un interes deosebit îl prezintă modelul coordonatelor sferice în geografie – *coordonatele geografice.*

Se ştie, că suprafaţa Pământului nu este o sferă perfectă, ci e turtită la poli. Raza Pământului în planul ecuatorului este de 6378 km, iar de la centrul planetei până la fiecare pol ea este de 6357 km. Vom ad-mite, totuşi, că Pământul este o sferă perfectă cu raza $R = 6367$ km. În majoritatea problemelor, legate de coordonate, eroarea care s-ar obţine este nesemnificativă. Vom considera că sistemul cartezian *XOY* are originea în centrul Pământului, axa *OZ* e orientată spre polul nord. Atunci intersecţia planului de coordonate *XOY* cu suprafaţa Pământului va coincide cu ecuatorul. Axa *OX* va fi orientată spre punctul de intersecţie a ecuatorului cu meridianul Greenwich. Acest meridian a fost ales ca meridian 0 în anul 1884 la o conferinţă internaţională a geografilor. El trece prin localitatea Greenwich, situată în apropierea Londrei, unind cei doi poli ai Pământului.

Oricare punct de pe suprafaţa Pământului este determinat de două coordonate θ şi φ, a treia coordonată fiind constantă: $\rho = R = 6367$ km.

Valorile lui θ se vor depune de la meridianul 0: cu semnul "+" spre est (longitudinea estică) şi cu semnul "-" spre vest (longitudinea vestică). Astfel, $-180^o \le \theta \le 180^o$. Valorile unghiului φ se depun de la ecuator: cu semnul "+" spre nord (latitudinea nordică) şi cu semnul "-" spre sud (latitudinea sudică). Prin urmare, $-90^o \le \varphi \le 90^o$. Pentru oricare două puncte de pe suprafaţa sferică, distanţa cea mai scurtă nu este lungimea segmentului ce le uneşte, ci lungimea celui mai mic arc, care se obţine la intersecţia suprafeţei sferice cu planul, ce trece prin cele două puncte şi centrul Pământului. În continuare, se va expune o metodă de calculare a acestei distanţe, bazată pe noţiunea simplă de *produs scalar* a doi vectori.

Fie $M_1(\theta_1, \varphi_1)$ şi $M_2(\theta_2, \varphi_2)$ două puncte arbitrare pe suprafaţa sferei. Conform formulelor (1), se află coordonatele lor carteziene. Fie $M_1\ (x_1,y_1,z_1)$, $M_2\ (x_2,y_2,z_2)$. Se examinează vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} = (x_1,y_1,z_1)$ şi $\vec{b} = \overrightarrow{OM_2} = (x_2,y_2,z_2)$ (Fig. 2) cu produsul scalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \qquad (2)$$

Considerând, pentru început, că raza sferei este egală cu 1, se determină $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Fie γ unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$; atunci $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\gamma$, adică $\gamma = \arccos(\vec{a} \cdot \vec{b})$. Cunoscând unghiul γ (exprimat în radiani) şi revenind la raza sferei R = *6367 km*, se află lungimea arcului căutat $M_1M_2 = \gamma R$, adică exact distanţa dintre punctele M_1 şi M_2. Astfel, algoritmul de aflare a distanţei dintre două puncte prevede realizarea următoareloir etape:

1. aflarea coordonatelor carteziene ale punctelor M_1 şi M_2;
2. calcularea produsului scalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = \cos\gamma$;
3. aflarea unghiului γ;
4. aflarea distanţei dintre punctele M_1 şi M_2.

Pentru efectuarea tuturor calculelor, s-a elaborat un program în *Excel*. În calitate de exemplu, se aplică acest algoritm pentru a afla distanţele dintre oraşele Chişinău şi Paris.

Pentru Chişinău, longitudinea estică, $\theta_1 = 28^o55'$, iar latitudinea nordică, $\varphi_1 = 47°$. În coordonate carteziene,

$$x_1 = 0{,}596969,\ y_1 = 0{,}329771,\ z_1 = 0{,}731354.$$

Pentru Paris, $\theta_2 = 2^o21'03''$, $\varphi_2 = 48^o51'24''$, iar coordonatele carteziene,

$$x_2 = 0{,}657391,\ y_2 = 0{,}026988,\ z_2 = 0{,}753066.$$

Conform formulei (2), se află produsul scalar, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\gamma = 0{,}952100$, adică $\gamma = 0{,}310765$ (radiani). În final, se obţine distanţa dintre Chişinău şi Paris, egală cu 1978,72 km. Acest rezultat este în deplină concordanţă cu distanţa exactă dintre aceste oraşe, care, conform [2], este egală cu 1977,82 km.

În mod asemănător se află distanţa dintre Chişinău şi Roma (1417,09 km), dintre Chişinău şi Washington (7977,51 km).

Bibliografie

1. Piskunov, N.S. *Calcul diferenţial şi integral. Vol. 1.* Chişinău, Ed. Lumina, 1992.
2. www. *Distancecalculator.net*.