ЛИНЕЙНЫЕ РАСШИРЕНИЯ, НЕ ИМЕЮЩИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ

В.Ф. Черний

Пусть (X, p, B) - $n-$мерное векторное расслоение с компактной базой B; $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)-$ линейное расширение, т.е. (X,R,π) и $(B,R,\rho)-$потоки, $p\circ\pi^t=\rho^t\circ p$ и ограничение π^t на каждый слой $X_b\equiv p^{-1}(b)$ линейно при всех $t\in R$.

Пусть $(X^*, p^*, B)-$двойственное векторное расслоение, т.е. расслоение линейных $B-$морфизмов расслоения (X, p, B) в одномерное тривиальное векторное расслоение $(B\times R, pr_1, B)$. Слой X_b^* расслоения (X^*, p^*, B) совпадает с пространством всех линейных функционалов на слое $X_b(b\in B)$. Отображение $\pi_*: X^*\times R\to X^*$, где $\pi_*^t(\xi)(x)=\xi(\pi^{-t}(x))$ $(t\in R, \xi\in X^*, x\in X_{\rho^t(b)}, b\in B)$, определяет поток (X^*,R,π_*). При этом расширение $p^*:(X^*,R,\pi_*)\to(B,R,\rho)$ является линейным и называется сопряженным с линейным расширением $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)$.

Говорят, что линейное расширении $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)$ не имеет нетривиальных ограниченных движений, если из соотношения $\sup\{\|\pi^t(x)\|: t\in R\}<\infty$ следует, что $\|x\|=0$.

Положим $X^s=\{x\in X:\|\pi^t(x)\|\to 0(t\to+\infty)\}, X^u=\{x\in X:\|\pi^t(x)\|\to 0(t\to-\infty)\}$.
Линейное расширение $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)$ называют удовлетворяющим условию трансверсальности, если $X_b^s+X_b^u=X_b(b\in B)$.

Сопряженное линейное расширение $p^*:(X^*,R,\pi_*)\to(B,R,\rho)$ не имеет нетривиальных ограниченных движений тогда и только тогда, когда линейное расширение $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)$ удовлетворяет условию трансверсальности.

Линейное расширение $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)$ называется гиперболическим, если расслоение (X,p,B) является суммой Уитни двух инвариантных векторных подрасслоений X_1 и X_2, причем существуют такие числа $d>0$ и $\alpha>0$, что

$$\|\pi^t(x)\|\le d\|x\|\exp(-\alpha t)(t>0, x\in X_1); \qquad \|\pi^t(x)\|\le d\|x\|\exp(\alpha t)(t>0, x\in X_2).$$

Линейное расширение $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)$ гиперболично тогда и только тогда, когда оно не имеет нетривиальных ограниченных движений и удовлетворяет условию трансверсальности.

Пусть $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)$ - линейное расширение и (X_1,p_1,B) некоторое векторное подрасслоение расслоения (X,p,B). Если множество $X_1\subset X$ инвариантно при (X,R,π), то будем говорить, что X_1- инвариантное векторное подрасслоение расширения $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)$, а линейное расширение $p|X_1:(X_1,R,\pi|X_1)\to(B,R,\rho)$ будем называть вложенным в линейное расширение $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)$ - линейное расширение, не имеющее нетривиальных ограниченных движений, и $p^*:(X^*,R,\pi_*)\to(B,R,\rho)$ - сопряженное с ним линейное расширение. Тогда существует гиперболическое линейное расширение $p\oplus p^*:(X\oplus X^*,R,\tilde{\pi})\to(B,R,\rho)$, распадающееся на линейные расширения $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)$ и $p^*(X^*,R,\pi_*)\to(B,R,\rho)$.

Если линейное расширение не имеет нетривиальных ограниченных движений, то и любое вложенное в него линейное расширение не имеет нетривиальных ограниченных движений.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для того чтобы линейное расширение не имело нетривиальных ограниченных движений, необходимо и достаточно, чтобы оно было вложено в гиперболическое линейное расширение.

Будем говорить, что линейное расширение $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)$ является гомоморфным образом линейного расширения $q:(W,R,\lambda)\to(B,R,\rho)$, если существует сюрьективный $B-$морфизм $\varphi:W\to X$ векторных расслоений, являющийся гоморфизмом потока (W,R,λ)на поток (X,R,π), т.е. $\varphi\circ\lambda^t=\pi^t\circ\varphi(t\in R)$.

Рассмотрим класс линейных расширений, являющихся гомоморфными образами линейных расширений, не имеющих нетривиальных ограниченных движений и обозначим его через *К*.

ТЕОРЕМА 2. Класс *К* линейных расширений замкнут относительно:
1)гомоморфных образов; 2)вложений; 3)сопряжения; 4)суммы Уитни.

Пусть задана коммутативная диаграмма групп преобразований и их гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc}(W\times R^n,R,\mu) & \xrightarrow{\bar{s}} & (X,R,\pi)\\ \downarrow{\bar{p}} & & \downarrow{p}\\ (W,R,\lambda) & \xrightarrow{s} & (B,R,\rho)\end{array}$$

в которой:

1) $\bar{p}:W\times R^n\to W-$ естественная проекция;

2) $\bar{p}:(W\times R^n,R,\mu)\to(W,R,\lambda)-$ линейное расширение;

3) s - открытое отображение и $s(W)=B$;

4) ограничение отображения $\bar{s}$ на каждый слой векторного расслоения $\bar{p}:W\times R^n\to W$ является изоморфизмом;

5) существует цепочка вложенных друг в друга линейных подмножеств $R\subset R^2\subset\ldots\subset R^n$ таких, что множества $W\times R^k(k=1,2,\ldots,n)$ инвариантны при $(W\times R^n,R,\mu)$.

Тогда линейное расширение $\bar{p}:(W\times R^n,R,\mu)\to(W,R,\lambda)$ называется треугольным видом линейного расширения $p:(X,R,\pi)\to(B,R,\rho)$ или треугольным линейным расширением. Всякое линейное расширение можно привести к треугольному виду.

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы треугольное линейное расширение принадлежало классу *К,* необходимо и достаточно, чтобы оно распадалось на n одномерных линейных расширений класса *К.*