SOLUȚII ABSOLUT CONTINUI ÎN SENS CARATHEODORY CU DERIVATA MIXTĂ L_p PENTRU INCLUZIUNI FUNCȚIONAL – DIFERENȚIALE ÎN DERIVATE PARȚIALE

Autor: ***Dragan Vladimir***

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Se demonstrează teorema de existență pentru incluziuni funcțional – diferențiale de tip hyperbolic având soluții cu derivata în spațiul* L_p, $p \ge 1$.

Cuvinte cheie: *aplicație multivocă, incluziune diferențială.*

Este demonstrată teorema despre dependența mulțimii soluțiilor de datele inițiale pentru incluziuni funcțional – diferențiale cu derivate parțiale.

Dacă J interval compact real, vom nota cu $AC_p\left(\mathsf{J}, R^n\right)$ spațiul aplicațiilor absolut continui $x : \mathsf{J} \to R^n$ astfel încât $\dot{x} \in Lp\left(\mathsf{J}, R^n, \mu\right)$, $p \in [1, \infty)$, μ - măsura Lebesque.

Fie a și b două numere reale, $Q = [0,a] \times [0,b]$ înzestrat cu σ - algebra Lebesque, $\left(R^n, \|\cdot\|\right)$ - spațiul euclidian. Fie Φ aplicație multivocă din $AC_p\left(Q, R^n\right)$ în $L_p\left(Q, R^n, \mu\right)$ cu valori decomposabile, închise și mărginite.

Pentru $f \in AC_p\left([0,a], R^n\right)$, $g \in AC_p\left([0,b], R^n\right)$ cu $f(0) = g(0)$ examinăm problema

$$Z_{xy} \in \Phi(Z), \quad Z(x,0) = f(x), \quad Z(0,y) = g(x). \tag{1}$$

Funcția $Z : Q \to R^n$ se numeşte soluție în sens Caratheodory al problemei (1) dacă există $\psi \in L_p\left(Q, R^n\right)$ astfel încât $Z(x,y) = f(x) + g(y) - f(0) + \int\limits_0^x \int_0^y \psi(s,t)\,dsdt$ pentru orice $(x,y) \in Q$ și $\psi(x,y) \in \Phi(Z)$ a.p.t. $(x,y) \in Q$.

Teoremă. Fie că aplicația multivalorică $\Phi : AC_p\left(Q, R^n\right) \to 2^{L_p}\left(Q, R^n, \mu\right)$ cu imagini submulțimi decomposabile, închise și mărginite din spațiul $L_p\left(Q, R^n, \mu\right)$ satisface următoarele condiții:

1. există o constantă reală pozitivă λ astfel încât pentru orice $(U,V) \in AC_p\left(Q, R^n\right)$ a.p.t. $(x,y) \in Q$ are loc

$$h_{Lp\left([0,x]\times[0,y], R^n, \mu\right)}\left[\Phi(U), \Phi(V)\right] \le \lambda \int_0^x \int_0^y \left\|U(s,t) - V(s,t)\right\| dsdt,$$

unde h_{Lp} este metrica Hausdorff generată de metrica spațiului L_p.

2. pentru careva aplicație $W \in AC_p\left(Q, R^n\right)$ au loc condițiile $W(x,0) = f(x)$, $W(0,y) = g(y)$ și a.p.t. în Q are loc inegalitatea

$$\rho_{Lp\left([0,x]\times[0,y],R^n,\mu\right)}\left[W_{xy},\Phi(W)\right]\le\int_0^x\int_0^y\beta_W(s,t)dsdt\,,\quad \beta_W\in Lp(Q,R).$$

Atunci pentru orice $\delta>0$ există cel puțin o funcție $Z\in ACp\left(Q,R^n\right)$ care este soluția incluziunii funcțional – diferențiale (1) şi care satisface pentru orice $(x,y)\in Q$ inegalitatea

$$\left\|Z(x,y)-W(x,y)\right\|\le\int_0^x\int_0^y S\left(\lambda(x-\xi)(y-\eta)\right)\beta_W(\xi,\eta)d\xi d\eta+\delta e^{xy}\,,\ \ S(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau^k}{(k!)^2}\,.$$