DESPRE GRUPURI TERNARE FĂRĂ UNITĂȚI ŞI FĂRĂ PROPRIETATE DE INVERSARE

Autor: ***Leonid Ursu***

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Se studiază şi se construiesc exemple de grup ternar fără unități şi grup ternar, toate elementele căruia servesc ca unitate. Se demonstreaza că există grupuri ternare care nu posedă proprietatea de inversare, fapt ce nu are loc în cazul binar.*

Cuvinte cheie: *3-IP cuasigrup, grup ternar, unitate, grup ternar simetric, legea asociativă pentru operaț ii algebrice ternare.*

Cuasigrupul ternar Q( ) se numeşte 3-IP- cuasigrup (cuasigrup ternar cu proprietate de invesare) [1] dacă pe mulțimea finită Q există substituțiile v_{ij}; $i, j \in \overline{1,3} \cdot v_{ij} = \varepsilon$ - substituție unitară astfel încât sunt satisfăcute identitățile:

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(x_1^3\right), v_{12}x_2, v_{13}x_3\right) = x_1 \\
&\left(v_{21}^3 x_1, \left(x_1^3\right), v_{23}x_3\right) = x_2 \\
&\left(v_{31}^3 x_1, v_{32}x_2, \left(x_1^3\right)\right) = x_3
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

pentru orice $x_1^3 \in Q^3$

v_{ij} se numesc substituții de inversare iar [v_{ij}] – matrice de inversare, $i \in \overline{1,3}$; $j \in \overline{1,4}$; $v_{i4} = \varepsilon$. Elementul $e \in Q$ se numeste unitate pentru 3- cuasigrupul Q( ), dacă $(x, e, e) = (e, x, e) = \; = (e, e, x) = x$ pentru orice $x \in Q$. 3- cuasigrupul cu unitate se numeşte 3- buclă. Se ştie [1] că o buclă poate avea mai mult de o unitate, iar un 3-IP – cuasigrup are mai mult de o matrice de inversare. 3- Cuasigrupul Q( ) elementele căruia satisfac legea asociativă:

$\left((x_1, x_2, x_3), x_4, x_5\right) = \left(x_1(x_2, x_3, x_4), x_5\right) = \left(x_1, x_2(x_3, x_4, x_5)\right)$ pentru orice $x_1^5 \in Q^5$ se numeşte 3- grup sau grup ternar. Există grup ternar cu o unitate; grup ternar cu mai multe unități; grup ternar, toate elementele căruia servesc ca unitate; grup ternar fără unități.

Exemplul 1:

a	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*b*	*a*

b	*a*	*b*
a	*b*	*a*
b	*a*	*b*

Pe mulimea $Q = \{a; b\}$ definim operația ternară (x_1, x_2, x_3) pentru orice $x_1^3 \in Q^2$, definită prin tabelurile *a* şi *b*, unde *x* este elemntul prin care se notează tabelul.

La intersecția coloanei x_2 cu coloana x_3 din acest tabel se obține rezultatul operației ternare: $(a, b, b,) = a$, $(b, a, b,) = a$. Q ( ) este grup simetric fiecare element al căruia este unitate fiindcă $(a, a, a,) = a$, $(b, a, a,) = (a, b, a,) = (a, a, b,) = b$;

$(b, b, b,) = b$, $(a, b, b,) = (b, a, b,) = (b, b, a,) = a$;. Acest fapt nu are loc în cazul binar.

Exemplul 2:

a	*a*	*b*
a	*b*	*a*
b	*a*	*b*

b	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*b*	*a*

Pe mulțimea $Q = \{a; b\}$ definim operația ternară (x_1, x_2, x_3) pentru orice $x_1^3 \in Q^3$, cu ajutorul tabelurilor alcătuite ca în exemplul precedent.

Q( ) este grup ternar simetric fără unitate, fapt ce nu are loc în cazul binar, fiindcă, conform definiției, orice grup binar posedă o unitate şi numai un singură.

Grupul ternar Q ( ) se numeşte simetric dacă $\left(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3}\right) = \left(x_1, x_2, x_3\right)$ pentru orice $x_1^3 \in Q^3$ şi orice $\alpha \in S_3$, unde S_3 - grupul simetric de substituții de ordinul 3 pe mulțimea Q. În caz contrar Q ( ) se numeşte grup nesimetric.

Se ştie din [1] că orice grup ternar Q ( ) este reductibil prin grup binar Q ( ) (teorema Gluskin Hossu):
$\left(x_1^3\right) = x_1 \cdot \varphi x_2 \cdot \varphi^2 x_3 \cdot k$,

unde: φ automorfism Q ( ), k – element fix din Q, $\varphi k = k$ şi $\varphi^2 x = k \cdot x \cdot k^{-1}$.
Dacă grupul ternar Q( ) posedă unitate, atunci

$$\left(x_1^3\right) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Dacă Q ( ) este grupu ternar fără unitate atunci

$$\left(x_1^3\right) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot k$$

Orice grup binar Q( ), datorită legii asociative, posedă proprietatea de inversare: $Ix \cdot xy = y$, $yx \cdot Ix = y$, unde I este substituție pe mulțimea Q, $I : x \to x^{-1}$. Această importantă proprietate nu o posedă orice grup ternar, ceea ce înseamnă că teoria n – operațiilor algebrice, $n>2$, nu repetă întocmai teoria operațiilor algebrice binare. Astfel de situații profesorul Valentin Belousov, fondatorul teoriei *n*- cuasigrupurilor, le numea salturi calitative în algebra universală.

Teoremă: Orice grup ternar nesimetric Q ( ) reductibil prin grup binar neabelian Q (·) nu posedă proprietatea de inversare.

Demonstrație: Fie Q( ) grup ternar nesimetric reductibil prin grup binar neabelian Q(·). Presupunem contrariu că Q ( ) este 3-IP- grup, adică Q ( ) satisface identitățile (1). Precăutăm prima identitate de inversare:

$$\left(\left(x_1^3\right), v_{12}x_2, v_{13}x_3\right) = x_1 .$$

Aplicînd teorema Gluskin - Hossu obținem

$$x_1 \cdot \varphi x_2 \cdot \varphi^2 x_3 \cdot k \cdot \varphi v_{12} x_2 \cdot \varphi^2 v_{13} x_3 \cdot k = x_1 .$$

Înlocuid x_1 prin *e*, unde *e*- unitatea grupului binar Q(·), obținem

$$\varphi x_2 \cdot \varphi^2 x_3 \cdot k \cdot \varphi v_{12} x_2 \cdot \varphi^2 v_{13} x_3 \cdot k = e,$$

sau $$\varphi x_2 \cdot R_k \varphi^2 x_3 = IR_k \varphi^2 v_{13} x_3 \cdot I\varphi v_{12} x_2 .$$

Notăm $\varphi = \alpha$, $R_k \varphi^2 = \beta$, $IR_k \varphi^2 v_{13} = \gamma$, $I\varphi v_{12} = \delta$.

Atunci $\alpha x_2 \cdot \beta x_3 = \gamma x_3 \cdot \delta x_2$, pentru orice x_2, x_3 din Q, unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - substituții pe mulțimea Q.

În [2] este demonstrat că dacă grupul binar Q(·) satisface ultima identitate atunci Q(·) este grup abelian. Rezultat analog se obține precăutând celelalte două identități din (1).

Rezultă că grupul binar Q(·) către care este reductibil grupul ternar nesimetric Q( ) este grup abelian. Contrazicerea obținută demonstreaza teorema.

Consecință: Orice grup ternar nesimetric cu unitate nu posedă proprietate de inversare.

Într-adevăr, dacă Q( ) este grup ternar nesimetric cu unitate, atunci, conform teoremei Gluskin-Hossu,

$$\left(x_1^3\right) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Din aceasta reprezentare uşor se observă că grupul ternar nesimetric cu unitate nu poate fi reductibil prin grup binar abelian. Deci Q(·) este grup binar neabelian. Conform teoremei demonstrate, rezultă că grupul ternar nesimetric cu unitate Q( ) nu posedă proprietate de inversare.

În [3] se demonstrează că orice grup ternar nesimetric fără unitate reductibil prin grup binar abelian cu condiția $\varphi^2 = \varepsilon$ are proprietate de inversare, una din matricele de inversare ale căruia este matricea:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & I & I & \varepsilon \\ I\varphi & \varepsilon & I\varphi & \varepsilon \\ I & I & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Bibliografie

1. Belousov V.D. *n – Cuasigrupuri*. Chişinău, Ştiința, 1972. 227 pagini (în limba rusă).
2. Belousov V.D. *Identități echilibrate în cuasigrupuri.* Matematiceskii sbornik, 1966, 70 (112), nr.1. (în limba rusă).
3. Ursu L.A. *Despre proprietatea de inversare a n- grupurilor*. Cercetări în teoria cuasigrupurilor binare şi n- cuasigrupurilor. Chişinău, Ştiința, 1985, pag. 124-133. (în limba rusă).