

Lucrări de Laborator Asistate de Calculator

Studierea legii conservării energiei mecanice la rostogolirea unei bile pe un uluc înclinat

Rusu Al., Pîrțac C., Gutium S.
Universitatea Tehnică a Moldovei
Chișinău, Moldova
fizica.rusu@gmail.com

Abstract – We propose a piece of software specifically designed for the study of conservation of mechanical energy in the form of a rolling ball on an inclined groove with a specific installation using a computer interfaced digital timer. The software allows the determination of kinetic and potential energies of the ball in its different positions on the groove, experimental verification of the law of conservation of mechanical energy from the ball rolling groove determining bias, standard error calculation, setting the confidence interval for a given level of confidence, building the graph of studied dependence using the method of smallest squares, as well as delivery of the report on the proposed laboratory exercise.

Key Words – Ball, groove, mechanical energy conservation.

I. INTRODUCERE

Învățarea prin cercetare a diferitor legi și relații fizice la lucrările de laborator efectuate în mod tradițional este împiedicată de imposibilitatea în timpul a două ore de a colecta și, mai ales, a prelucra un număr mare de date experimentale ce sunt indispensabile unei cercetări adevărate. Această piedică poate fi înlăturată, dacă se folosesc aparate de măsură digitale interfațate calculatorului, precum și softuri speciale ce permit în timp scurt achiziția datelor și procesarea lor. În calitate de exemplu, vom analiza posibilitățile studierii legii conservării energiei mecanice la rostogolirea unei bile pe un uluc înclinat (fig. 1) la lucrările de laborator, utilizând pentru măsurarea intervalelor de timp necesare un cronometru digital interfațat calculatorului. Cronometrul este destinat

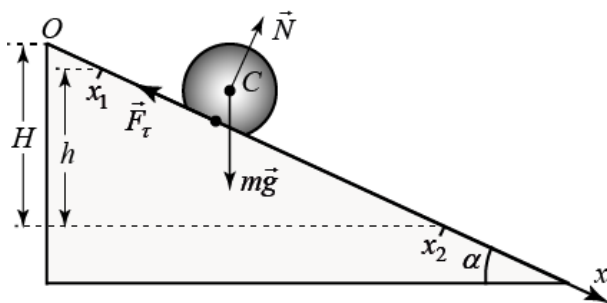


Fig. 1

măsurării a unui număr de până la 99 intervale consecutive de timp utilizând unul sau doi senzori. Fiecare senzor conține o sursă de radiație infraroșie emisă printr-un orificiu sub forma unui fascicol îngust și un receptor. Intervalele de timp $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{99}$ sunt intervalele, în care obturatorul înșurubat în

corpul ce se mișcă acoperă, descoperă, apoi din nou acoperă și din nou descoperă fascicolul unui senzor ș. a. m. d. [1].

II. CONSIDERAȚII TEORETICE ȘI EXPERIMENTALE

Experimentul propus constă în determinarea energiei mecanice a bilei în poziția cu coordonata x_1 , din care bila se eliberează, și în poziția cu coordonata x_2 (fig. 1), în care aceasta ajunge în rezultatul rostogolirii pe uluc, precum și în compararea acestor energii. Energia mecanică a bilei în poziția x_1 este egală cu energia potențială a acesteia, energie ce se exprimă prin mărimi direct măsurabile în experiment după cum urmează:

$$E_1 = E_p = mgh = mg(x_2 - x_1)\sin\alpha = mg(x_2 - x_1)\frac{H}{x_2}, \quad (1)$$

unde m este masa bilei, g este accelerația gravitațională, iar H este înălțimea planului înclinat măsurată de la nivelul poziției x_2 .

Energia mecanică a bilei în poziția x_2 este egală cu energia cinetică a bilei, energie care întrunește atât energia cinetică a mișcării de translație, cât și energia cinetică a mișcării de rotație:

$$E_2 = E_c = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}, \quad (2)$$

unde v_C este viteza centrului de masă al bilei, $I_C = 2/5mR^2$ este momentul de inerție al bilei față de axa ce trece prin centrul de masă C al acesteia perpendicular pe planul fig. 1, R este raza bilei, iar ω este viteza unghiulară a punctelor de pe suprafața ei. Dar, $\omega = v_l/r = v_C/r$, deoarece, după cum se vede din fig. 2, viteza liniară a punctelor D (fig. 3) ce intră în contact cu ulucul v_l este egală numeric cu viteza centrului de masă al bilei v_C , iar distanța acestor puncte de la axa de rotație $r = \sqrt{R^2 - e^2}$, unde e este jumătate din lățimea ulucului (fig. 3). În mărimi direct măsurabile

$$E_2 = E_c = \frac{mv_C^2}{2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) = \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right), \quad (3)$$

unde viteza centrului de masă se determină măsurând intervalul de timp t_1 în care bila cu diametrul său mare pe linia FF întretaie fascicolul senzorului situat în poziția cu coordonata x_2 :

$$v_C = 2R/t_1 \quad (4)$$

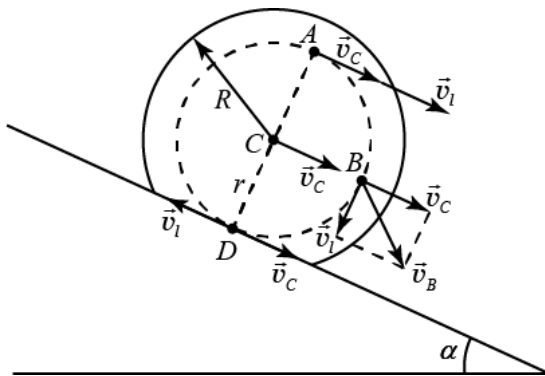


Fig. 2

În conformitate cu legea conservării energiei mecanice,

$$E_c = E_p, \quad (5)$$

dacă lucrul forței de frecare \vec{F}_r ce acționează din partea ulucului înclinat asupra bilei (fig. 1) este cu mult mai mic decât oricare din energiile E_c sau E_p în pozițiile cu coordonatele x_1 și, respectiv, x_2 . Relația (5) exprimată prin mărimi direct măsurabile are aspectul:

$$\frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) = mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2} \quad (6)$$

Ea poate fi privită ca o funcție liniară de tipul

$$Y = pX + b, \quad (7)$$

unde

$$Y = E_c = \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) \quad (8)$$

și

$$X = E_p = mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2}. \quad (9)$$

Dependența teoretică (11) arată că valorile pantei și termenului liber trebuie să fie $p=1$ și, respectiv, $b=0$. Aceasta înseamnă că graficul dependenței teoretice reprezintă un segment de dreaptă ce coincide cu bisectoarea primului cadran. Experimental, acest segment de dreaptă se poate construi efectuând $n \geq 5$ serii a câte $N \geq 10$ măsurări a intervalului de timp t_1 în care bila cu secțiunea de

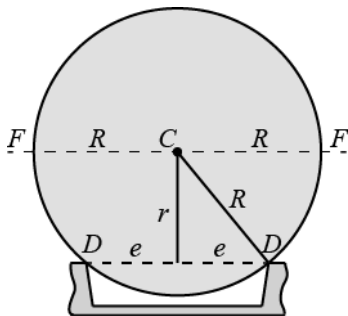


Fig. 3

diametrul $d = 2R$ întretaie fasciculul senzorului situat în poziția x_2 pe ulucul înclinat. Fiecărei serii îi va corespunde o valoare concretă a coordonatei x_1 a poziției inițiale a bilei. Pentru fiecare serie de măsurări se vor calcula valorile medii ale intervalului de timp \bar{t}_1 și ale energiei cinetice $\bar{Y} = \bar{E}_c$, valorile energiei potențiale $X = E_p$, precum și erorile

standard $\Delta \bar{t}_1$ și $\Delta \bar{E}_c$ ale mediilor aritmetice comise la măsurarea directă a intervalului de timp t_1 și la măsurarea indirectă a energiei cinetice E_c [2].

Obținând în acest mod $n \geq 5$ perechi de valori ale energiilor cinetice și potențială pentru $n \geq 5$ valori ale coordonatei bilei x_1 , se poate construi graficul dependenței

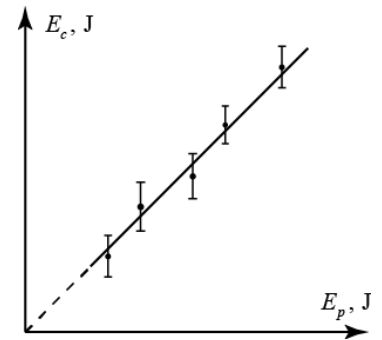


Fig. 4

liniare (7) (fig. 4) și calcula panta p și termenul liber b ale acesteia utilizând metoda celor mai mici pătrate [2]. Softul elaborat permite transferul intervalelor de timp măsurate la calculator, precum și realizarea rapidă a tuturor acestor calcule, construirea graficului din fig. 4, precum și perfectarea referatului la lucrarea de laborator. Calculul se realizează pentru nivelul de încredere $P^* = 0,683$, urmând ca studentul să calculeze erorile manual și pentru nivelul de încredere $P^* = 0,999$. Valabilitatea legii conservării energiei (6) în procesul de rostogolire a bilei pe ulucul înclinat se va considera ca și confirmată experimental, dacă graficul funcției (7) construit după punctele experimentale va reprezenta un segment de dreaptă, iar valoarea teoretică a pantei acestei drepte $p_{teor} = 1$ va rezulta inclusă în intervalul de încredere pentru nivelul de încredere $P^* = 0,999$.

Realizarea acestei cercetări experimentale este pentru studenți un prilej potrivit de analiză sub conducerea profesorului a limitelor de aplicabilitate a relației (6). Această relație poate fi afectată de unele fenomene ce n-au fost luate în seamă în modelul analizat, precum și de aproximația (4) utilizată la determinarea vitezei instantanee centrului de masă al bilei v_c :

1. După cum am menționat mai devreme, pentru ca legea conservării energiei mecanice să se respecte trebuie ca lucrul forței de frecare de rostogolire \vec{F}_r să fie cu mult mai mic decât fiecare din energiile E_c sau E_p . Forța de frecare de rostogolire \vec{F}_r este aplicată în punctele D ale bilei (fig. 3) ce intră în contact cu ulucul. Viteza instantanee a acestor puncte este egală cu zero. De aceea forța de frecare de rostogolire nu efectuează lucru mecanic și, deci, nu modifică valoarea energiei cinetice a bilei în mișcarea ei de rostogolire. Forța de frecare de rostogolire este o forță de frecare de repaus și rolul ei se reduce la aducerea bilei în mișcare de rostogolire pură. În prezența forței de frecare de rostogolire lucrul forței de greutate se consumă pentru creșterea energiei cinetice nu numai a mișcării de translație, ci și a celei de rotație. Vom observa că forța de reacțiune a planului înclinat \vec{N} , fiind perpendiculară pe direcția mișcării, de asemenea, nu efectuează lucru mecanic.

Aceste raționamente însă sunt valabile numai, dacă, atât bila, cât și ulucul sunt absolut rigide. Întrucât corpurile reale nu pot fi absolut rigide, devine clar că la rostogolirea bilei atât ulucul, cât și bila se deformează puțin, ceea ce conduce la efectuarea de către forța de frecare de rostogolire a unui lucru mecanic negativ L_{fr} și relația (6) în cazul real trebuie să aibă aspectul:

$$\frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) = mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2} + L_{fr} \quad (10)$$

Rămâne de investigat cât de mult acest lucru influențează valoarea energiei cinetice a bilei în starea finală. Comparând (10) cu (7), observăm că $L_{fr} = b$. Procesarea datelor experimentale ne va arăta valoarea termenului liber b precum și eroarea standard Δb a acestuia. Pot exista două cazuri:

a) $|\Delta b| \geq b$. În acest caz vom putea trage concluzia că dreapta (7) în limitele erorilor experimentului trece prin originea de coordonate după cum o cere dependența teoretică (6), iar lucrul forței de frecare de rostogolire poate fi neglijat, valoarea lui fiind de ordinul erorilor comise în experiment. La verificarea relației $\Delta b \geq b$ trebuie să ținem seama de faptul că valoarea erorii standard Δb se calculează cu ajutorul softului propus pentru nivelul de încredere $P^* = 0,683$. Pentru un nivel de încredere mai ridicat, de exemplu, $P^* = 0,999$, eroarea standard va fi $\Delta b \cdot t(0,999, k)$, unde $k = n - 1$, n fiind numărul de serii de măsurări. Valoarea coeficientului $t(0,999, k)$ pentru diferite valori ale numărului k se determină din tabelul acestei mărimi.

b) $|\Delta b| < b$ pentru nivelul de încredere $P^* = 0,999$. În acest caz vom putea concluziona că lucrul forței de frecare de rostogolire este mai mare decât erorile comise în experiment, acesta putând fi măsurat indirect ca diferența energiilor cinetică și potențială:

$$\frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) - mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2} = L_{fr} \quad (11)$$

2. Expresia (6) pentru legea conservării energiei mecanice a fost obținută în presupunerea că bila se rostogolește pe ulucul înclinat fără alunecare. Dar, alunecarea bilei depinde de valoarea forței de frecare de rostogolire [3] care este o forță de frecare de repaus ce crește odată cu creșterea unghiului de înclinare α a planului față de orizontală:

$$F_r = \frac{2mR^2 g}{7R^2 - 5e^2} \sin \alpha \quad (12)$$

Alunecarea bilei nu se va produce atâta timp cât forța de frecare de rostogolire va fi mai mică decât forța de frecare la alunecare:

$$F_r < F_{fr} = \mu N = \mu mg \cos \alpha. \quad (13)$$

În cazul când $F_r \geq F_{fr}$, rostogolirea bilei pe uluc va fi însoțită de alunecarea acesteia și relația (6) nu va mai fi valabilă. Astfel, unghiurile de înclinare a planului față de orizontală pentru care legea conservării energiei mecanice (6)

este valabilă, după cum rezultă din formulele (12) și (13) trebuie să satisfacă condiția:

$$F_r < F_{fr} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < \frac{\mu(7R^2 - 5e^2)}{2R^2} = \operatorname{tg} \alpha_{\max} \quad (14)$$

unde α_{\max} este unghiul de înclinare a ulucului față de orizontală pentru care începe alunecarea bilei. Ulucul utilizat în instalația de laborator are lățimea $2e \approx 7 \text{ mm}$. Luând o bilă de oțel cu raza $R = 11 \text{ mm}$ și coeficientul de frecare la alunecare a oțelului pe o suprafață de oțel $\mu \approx 0,2$ (valoare tabelară), pentru unghiul maxim de înclinare a planului, obținem valoarea $\alpha_{\max} \approx 33^\circ$. Întrucât ulucul director din instalația utilizată este înclinat sub unghiul $\alpha \approx 45^\circ$, pentru verificarea experimentală a legii conservării energiei mecanice trebuie să utilizăm bile din material ce se caracterizează printr-un coeficient mare de frecare la alunecare. În lucrare se utilizează o bilă de metal acoperită cu un strat de gumă. Coeficientul de frecare la alunecarea gumei pe o suprafață de oțel este $\mu \approx 0,8$ (valoare tabelară), pentru unghiul α_{\max} obținându-se $\alpha_{\max} \approx 69^\circ$. Deci, pentru astfel de bile unghiul de înclinare a ulucului față de orizontală $\alpha \approx 45^\circ$ este destul de potrivit pentru verificarea legii conservării energiei mecanice.

3. La mișcarea uniform accelerată de translație ($a = \text{const.}$) a oricărui corp viteza lui medie pe o anumită distanță d coincide cu viteza instantanee a acestuia în mijlocul intervalului de timp t , în care corpul parcurge această distanță:

$$v_{\text{med}} = \frac{d}{t} = \frac{v_0 t + at^2/2}{t} = v_0 + a \cdot \frac{t}{2} \quad (15)$$

unde v_0 este viteza inițială a corpului. Dar, rostogolirea fără alunecare a bilei pe ulucul înclinat conduce la o mișcare uniform accelerată de translație cu accelerația [3]:

$$a = g \frac{5(R^2 - e^2)}{7R^2 - 5e^2} \sin \alpha \quad (16)$$

ceea ce înseamnă că formula (15) poate fi aplicată și la rostogolirea bilei:

$$\frac{d}{t_1} = v_0 + a \cdot \frac{t_1}{2} \quad (17)$$

unde t_1 este intervalul de timp în care bila cu secțiunea de diametrul $d = 2R$ întretaie fascicolul senzorului, iar v_0 este viteza bilei în momentul începerii acoperirii fascicolului senzorului de către aceasta. Pentru a putea măsura coordonata x_2 a bilei în starea finală vom aproxima viteza instantanee v în mijlocul intervalului de timp t_1 , adică viteza medie pe distanța d , cu viteza v_M în punctul M ce coincide cu mijlocul distanței parcurse d . Dar, conform formulei lui Galilei

$$v_M^2 - v_0^2 = ad \quad (18)$$

Din relațiile (17) și (18) rezultă că

$$v_M = v \sqrt{1 + \frac{a^2 t_1^4}{4d^2}} = v \sqrt{1 + \frac{a^2 t_1^4}{16R^2}} \quad (19)$$

În acest caz se va comite o eroare relativă

$$\varepsilon = \frac{|v - v_M|}{v} = \left| 1 - \frac{v_M}{v} \right| = \left| 1 - \sqrt{1 + \frac{a^2 t_1^4}{16R^2}} \right| \quad (20)$$

De aici rezultă că aproximația $v_{med} \approx v_M$ utilizată la deducerea relației (6) poate fi aplicată, dacă $a^2 t_1^4 / (16R^2) \ll 1$ sau dacă

$$t_1 \ll 2\sqrt{\frac{R}{a}} \quad (21)$$

Luând $R = 11 \text{ mm}$, $e = 3,5 \text{ mm}$, $\alpha \approx 45^\circ$ și $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, pentru accelerația bilei se obține $a \approx 4,8 \text{ m/s}^2$, iar pentru intervalele de timp măsurate - condiția $t_1 \ll 0,1 \text{ s}$. Experiența arată că la rostogolirea bilei din punctul cu coordonata $x_1 \approx 10 \text{ cm}$, bila întretaie fasciculul senzorului cu secțiunea de diametrul $d = 2R$ în intervalul de timp $t_1 \approx 0,02 \text{ s}$ care este de aproximativ 10 ori mai mic decât cel estimat cu ajutorul relației (21). Substituind această mărime în (20) obținem o eroare relativă $\varepsilon \approx 0,1\%$. Astfel, această eroare, care intervine ca o eroare sistematică de metodă, pentru obturatorul cu grosimea $d = 0,022 \text{ m}$ este, după cum se va vedea în rezultatul procesării datelor experimentale, cu mult mai mică decât erorile întâmplătoare comise în experiment și poate fi neglijată.

În fig. 5 este reprezentat graficul dependenței (7) obținut în rezultatul efectuării a $n = 7$ serii din câte $N = 10$ măsurări a intervalului de timp t_1 în care bila întretaie fasciculul

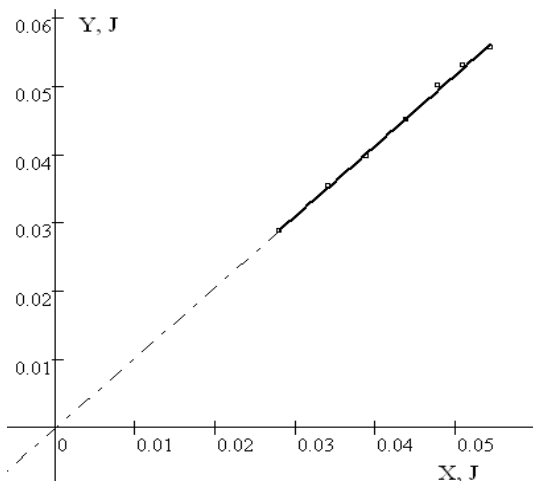


Fig. 5

senzorului situat în poziția x_2 la rostogolirea ei din poziția x_1 . Valorile medii ale mărimilor \bar{t}_1 și \bar{E}_c , precum și valorile mărimilor x_1 și E_p măsurate o singură dată sunt prezentate în

tabelul 1. Calculele realizate cu ajutorul softului propus au condus la următoarele rezultate: $p = 1,02$ și $b = -0,0001 \text{ J}$.

TABELUL 1

n	$x_1, \text{ m}$	$\bar{t}_1, \text{ s}$	$X = E_p, \text{ J}$	$Y = \bar{E}_c, \text{ J}$
1	0,01	0,01417	0,0546	0,05575
2	0,026	0,01453	0,0511	0,05301
3	0,04	0,01495	0,048	0,05008
4	0,059	0,01575	0,0439	0,04512
5	0,081	0,01679	0,039	0,0397
6	0,103	0,01776	0,0342	0,03548
7	0,131	0,0197	0,0281	0,02883

Pentru erorile standard ($P^* = 0,683$) s-au obținut rezultatele $\Delta p = 0,02$ și $\Delta b = 0,0008 \text{ J}$. Pentru $P^* = 0,999$: $\Delta p = 0,11$ și $\Delta b = 0,0047 \text{ J}$. Din rezultatele obținute studentul poate trage următoarele:

III. CONCLUZII

1. Pentru ambele nivele de încredere $P^* = 0,683$ și $P^* = 0,999$ $\Delta b > b$, ceea ce arată că dreapta experimentală în limitele erorilor comise în experiment trece prin originea de coordonate după cum o cere dependența teoretică. Aceasta înseamnă că lucrul forței de frecare de rostogolire este mult mai mic decât erorile comise în experiment, din care cauză acesta poate fi neglijat în acest experiment;

2. Rezultatul final pentru panta dreptei $p = 1,02 \pm 0,11$ pentru nivelul de încredere $P^* = 0,999$ arată că valoarea teoretică a pantei dreptei $p_{teor} = 1$ se află în interiorul intervalului de încredere (0,91; 1,13). Aceasta înseamnă că legea conservării energiei mecanice în experiment este confirmată cu o eroare relativă $\varepsilon \approx 10\%$

3. Relația verificată este valabilă numai dacă bila în procesul de rostogolire nu alunecă și ea nu alunecă întrucât unghiul de înclinare a ulucului este $\alpha = 45^\circ < 69^\circ$.

4. Relația verificată este valabilă dacă intervalul de timp în care bila cu secțiunea sa mare întretaie fasciculul senzorului satisface condiția $t_1 \ll 0,1 \text{ s}$. Cea mai mică valoare a intervalului de timp măsurat $t_1 = 0,01417 \text{ s}$ este de 7 ori mai mic decât intervalul limită. În acest caz se comite o eroare sistematică de metodă de 0,024%. Această valoare este cu mult mai mică decât eroarea întâmplătoare comisă în experiment și poate fi neglijată.

REFERINȚE

- [1] A. Rusu, C. Pîrțac, S. Rusu. **Trusa de mecanică asistată de calculator. Procesarea datelor**. Fizica și tehnologii moderne. V 6, Nr. 3-4 (23-24), 2008, p. 10-21.
- [2] A. Rusu, S. Rusu, C. Pîrțac. Prelucrarea datelor experimentale. Îndrumar de laborator la fizică. Chișinău, Secția Redactare și Editare a U.T.M., 2012.
- [3] A. Rusu, S. Rusu, C. Pîrțac. Lucrări de laborator la mecanică asistate de calculator. Îndrumar de laborator la fizică. Chișinău, Secția Redactare și Editare a U.T.M., 2012.