

STATICA UNUI FIR FLEXIBIL INEXTENSIBIL ACȚIONAT DE FORȚE CONCENTRATE

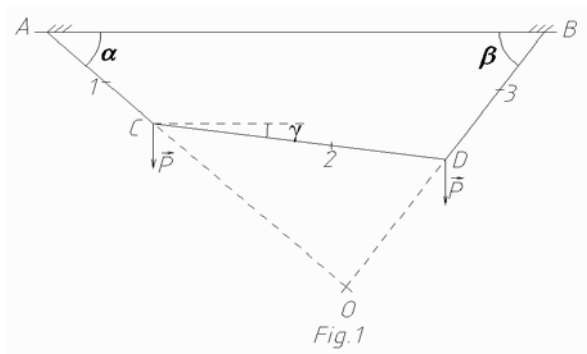
Autori: Mihai ȚOPA, Olga CERNII

Universitatea Tehnică a Moldovei

Ideea principală: Determinarea formei curbei de siguranță ale săgeților punctelor de aplicație ale forțelor și tensiunilor în porțiunile unui fir suspendat la capete de puncte care se află pe aceeași orizontală.

Cuvinte cheie: tensiune în fir acționat de forțe concentrate, săgeata punctului de aplicație a forței, curba de siguranță.

Vom studia echilibrul unui fir flexibil și inextensibil de lungime L care este suspendat de capetele A și B aflate la aceeași orizontală. Distanța dintre punctele A și B este l . De fir sunt suspendate în punctele C și D două greutateți identice P la distanța $CD = a$, unde $L/2 < a < L$. Vom determina tensiunile în porțiunile de fir și săgețile punctelor firului în care sunt aplicate forțele. Notăm $AC = \xi$, $DB = \eta$. Firul, fiind inextensibil, satisface condiția $\xi + a + \eta = L = \text{const}$. Notăm cu α , β și γ unghiurile formate de porțiunile AC , BD și CD cu orizontala. Ecuațiile de echilibru ale punctelor C și D sunt:



$$\sum F_x = -T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \gamma = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \gamma - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = T_2 \sin \gamma + T_3 \sin \beta - P = 0 \quad (3)$$

Adăugăm la aceste ecuații relațiile dintre unghiurile α , β și γ din considerente geometrice

$$\xi \cos \alpha + a \cos \gamma + \eta \cos \beta = l \quad (4)$$

$$\xi \sin \alpha + a \sin \gamma - \eta \sin \beta = 0 \quad (5)$$

Configurația patrulaterului $ACDB$ este determinată de condiția ca punctul de intersecție a prelungirilor laturilor AC și BD și centrul de masă a sistemului să fie situat pe aceeași verticală

$$\sin(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta - \sin(\beta + \gamma) \cos \alpha = 0 \quad (6)$$

Variind parametrul ξ , din sistemul de șase ecuații determinăm șase necunoscute: α , β , γ , T_1 , T_2 și T_3 .

Exemplu: $l=10m$, $L=12m$, $a=8m$, $P=1kN$

Rezultatele calculelor sunt reprezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

$\xi, (m)$	$\alpha, ^\circ$	$\beta, ^\circ$	$\gamma, ^\circ$	T_1, kN	T_2, kN	T_3, kN
0,1	70	50	21,2	1,24	0,45	1,09
1	62	55,82	11,53	1,27	0,61	1,06
2	60	60	0	1,16	0,58	1,16
3	55,82	62	-11,53	1,06	0,61	1,27

În cazul cînd ξ este cuprins în intervalul (4;8), de fir este suspendată o singură greutate, în urma calculelor, apar alte rezultate.

Construim graficul dependenței tensiunilor T_1, T_2 și T_3 de lungimea porțiunii $AC = \xi$. Determinăm săgețile punctelor C și D ale firului ca funcții de x , unde originea sistemului Oxy coincide cu mijlocul segmentului AB , iar axa Oy este orientată pe verticală în jos.

$$x_C = -\frac{l}{2} + \xi \cos \alpha, \quad f_C = y_C = \xi \sin \alpha$$

$$x_D = \xi \cos \alpha + a \cos \gamma - \frac{l}{2}, \quad f_D = y_D = \xi \sin \alpha + a \sin \gamma \quad (7)$$

Tabelul 2

$\xi, (m)$	η, m	x_C, m	y_C, m	x_D, m	y_D, m	y_C, m	y_D, m
0,1	3,9	-4,96	0,09	2,49	2,99	0,10	3,11
1	3	-4,53	0,88	3,31	2,48	1,08	2,68
2	2	-4,00	1,73	4,00	1,73	1,96	1,73
3	1	-3,31	2,48	4,52	0,88	2,68	1,10
4	0	-2,40	3,04	5,00	0,00	3,14	0,00
5	7	-1,20	3,25			3,31	
6	6	0,00	3,32			3,32	
7	5	1,20	3,25			3,31	
8	4	2,40	3,04			3,14	

Aproximăm graficul dependenței săgeților punctelor firului unde sunt aplicate forțe ca funcție de x cu o parabolă de gradul patru $y = b - (cx)^4$, unde

$$(8) b = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 - l^2}, \quad c = 2\sqrt[4]{b} / l. \quad \text{În cazul nostru } b=3,32; \quad c=0,27.$$

Verificăm și introducem rezultatele în tabelul 2. Construim graficul. Curba $y = b - (cx)^4$ desparte zona în care se află poligonul format din fir de zona în care el lipsește de aceea numim această linie curba de siguranță.

Concluzie: Tensiunea în fir este variabilă, este mai mare în porțiunea cu lungime mai mică. Curba de siguranță a săgeților punctelor firului în care sunt aplicate forțele reprezintă o parabolă de gradul patru.

Bibliografie

1. Szolga V. *Mecanica teoretică, vol I. Statica*. Editura Divers-press, București, 1994, 128 p.
2. Atanasiu M. *Mecanica tehnică. Statica*. Editura tehnică. București, 1963, 228p.
3. Бухгольц Н.Н. *Основной курс теоретической механики, часть I*. Изд – во „Наука”, Москва 1967, 467с.
4. Caraganciu V., Colpagiu M., Țopa M. *Mecanica teoretică*. Editura „Știința”, Chișinău, 1994, 471 p.