ALGORITM DE SINTEZĂ A SISTEMELOR ASTATICE ÎN SPAȚIUL STĂRILOR PENTRU MODELE DE OBIECTE ASTATICE

Ion Fiodorov, Iulian Lisnic, Dorian Saranciuc

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *An algorithm of synthesis of astatic systems in states space with maximal stability degree for control of models'objects with inertia and astatism is proposed in this paper. In particular, an astatic system in states space for control of model's object with third order inertia and astatism is designed in conformity of this method.*

Cuvinte-cheie: *sistem astatic, spațiul stărilor, ecuație vectorial-matricială, vectorul reacției după stare, sinteza sistemelor, grad maximal de stabilitate.*

1. Introducere

Descrierea sistemelor automate prin formalismul intrare-stare-ieşire permite modificarea în mod dorit a dinamicii sistemelor proiectate prin impunerea valorilor proprii ale matricei de stare a sistemului. Însă alegerea valorilor proprii este o problemă destul de dificilă care de obicei se soluționează prin următoarele metode [1]:

- Metoda polilor dominanți. În cazul acestei metode sinteza dinamicii sistemelor de ordinul doi cu ajutorul valorilor proprii este simplă, iar pentru sistemele de ordin superior acest lucru este îngreunat de dificultățile care apar la alocarea polilor sistemului, care ar asigura nişte indici de performanță impuşi.
- Metoda conducerii optimale permite impunerea polilor cu ajutorul unei funcții obiectiv care stabileşte legătura dintre eroarea semnalului şi consumul energetic al semnalului de conducere.

În [2] a fost elaborat un algoritm de sinteză a sistemelor dinamice, în reprezentarea intrare-stare-ieşire, prin intermediul căruia se impune sistemului proiectat o dinamică care-i asigură un grad maximal de stabilitate.

În lucrarea dată se propune o metodă de sinteză a sistemelor astatice în spațiul stărilor pentru modele de obiecte cu inerție şi astatism, care permite de a determina şi impune anume acele valori proprii ale matricei de stare, care asigură gradul maximal de stabilitate al sistemului proiectat.

În cazul în care se pune problema urmăririi unui semnal, la sinteza controlerului este necesară impunerea unor indici de performanță care se referă la dinamica erorii sistemului (față de semnalul de referință impus).

Atunci când obiectul reglat conține astatism, eroarea staționară la semnalul treaptă este nulă. Schema structurală a sistemului astatic în spațiul stărilor în cazul unui astfel de obiect este prezintată în figura 1 [1].

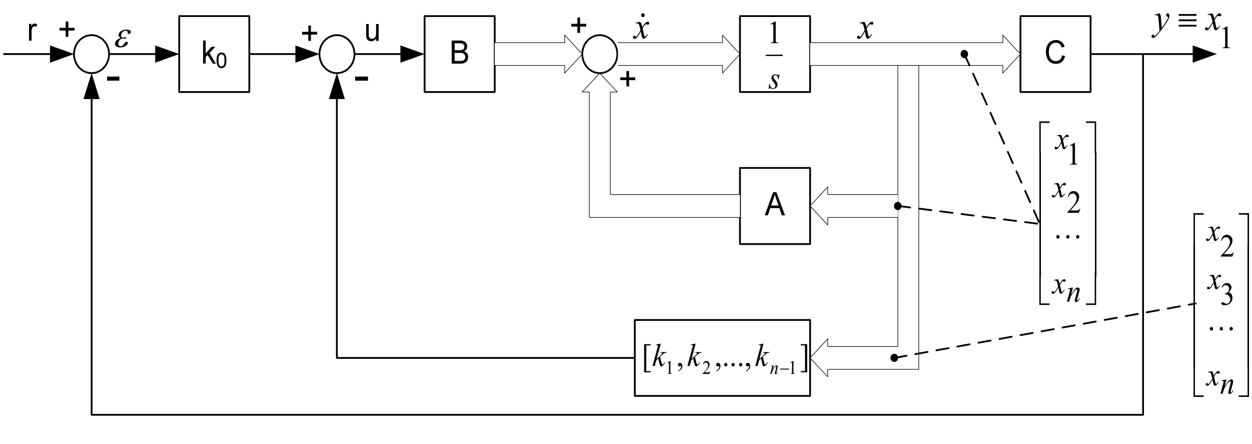

Fig.1. Schema structurală a sistemelor astatice în spațiul stărilor.

În conformitate cu schema din figura 1, ecuația vectorial-matricială a sistemului se transformă astfel:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + B \cdot \left(-\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + k_0 (r - x_1) \right) = (A - BK) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + Bk_0 r, \quad (1)$$

unde $k = [k_0 \quad k_1 \quad \cdots \quad k_{n-1}]$

Pe baza relației (1) se obține un sistem cu o dinamică a erorii determinată de alegerea convenabilă a valorilor proprii ale matricei $A - BK$ şi care are în final eroarea staționară zero. În plus semnalul de comandă staționar este şi el nul:

$$u(\infty) = -[k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_{n-1}] \cdot [x_2(\infty) \quad x_3(\infty) \quad \ldots \quad x_n(\infty)]^T + k_0 (r(\infty) - x_1(\infty)) \Rightarrow u(\infty) = 0. \quad (2)$$

2. Algoritmul de sinteză a sistemelor astatice în spațiul stărilor cu grad maximal de stabilitate pentru modele de obiecte cu inerție şi astatism

Algoritmul presupune parcurgerea următorilor paşi.

1. Se obține ecuația diferențială normalizată a sistemului cu parametrii cunoscuți

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_1 y^{(1)} + \alpha_0 y = \beta_0 u. \quad (3)$$

2. Se determină ecuația diferențială în formă vectorial-matricială în realizarea standard controlabilă:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu; \\ y = c^T x. \end{cases} \quad (4)$$

3. Verificarea controlabilității $rangU = rang[b, Ab, \ldots, A^{n-1}b] = n$.
   a. În cazul în care condiția este îndeplinită sistemul este controlabil şi se poate trece la etapa următoare.
   b. În caz contrar sistemul nu poate fi condus cu ajutorul acestui algoritm.
4. Se proiectează structura regulatorului după următoarea expresie:

$$u(t) = -[k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}] \cdot [x_2, x_3, \ldots, x_n]^T + k_0 \varepsilon, \quad (5)$$

unde $\varepsilon = (r - y)$, r şi y sunt mărimile de referință şi de ieşire respectiv.

5. Se obține polinomul caracteristic al matricei A:

$$\varphi_A(s) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 + \alpha_0. \quad (6)$$

6. Se determină ecuația caracteristică dorită şi gradul maximal de stabilitate, în conformitate cu criteriul gradului maximal de stabilitate.
   - Utilizând substituția $s_k = \pm j\omega_k - J$, ecuația caracteristică obținută la pasul 5 se descompune în n factori liniari şi se aduce la forma

$$\varphi_c(s) = \prod_{k=1}^{z} (s - j\omega_k + J)(s + j\omega_k + J) \prod^{r} (s + J) = s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \ldots + q_1 s + q_0 = 0, \quad (7)$$

unde J este gradul maximal de stabilitate al sistemului; z - numărul perechilor de rădăcini complexe; r - numărul de rădăcini reale; $n = 2z + r$ - gradul ecuației caracteristice a sistemului proiectat.

   - Din egalitatea

$$\alpha_1(a_0, a_{n-1}) = q_1(J, \omega_k), \omega_k = 0, \quad (8)$$

după unele transformări, obținem expresia pentru determinarea gradului maximal de stabilitate J al sistemului proiectat

$$J = f(a_0, a_{n-1}), \quad (9)$$

unde a_i - parametrii funcției de transfer a modelului obiectului reglat.

7. În conformitate cu coeficienții ecuațiilor caracteristice $\varphi_c(s)$, $\varphi_A(s)$ şi formulele

$$k_0 = (q_0 - \alpha_0) / \beta_0; \; k_i = q_i - \alpha_i, \; i = 1, \ldots, (n-1) \quad (10)$$

se determină componentele vectorului de reacție.
Variind partea imaginară a rădăcinilor complexe ω_k sau gradul de stabilitate J putem să impunem sau să optimizăm performanțele procesului indicial al sistemului dinamic proiectat: suprareglajul σ, gradul de amortizare ψ sau durata regimului tranzitoriu t_t.

3. Sinteza sistemelor astatice în spațiul stărilor pentru modele de obiecte cu inerție şi astatism

Fie că se dă funcția de transfer a modelului obiectului de reglare cu inerție de ordinul trei şi astatism:

$$H_F(s)=\frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}=\frac{k}{a_0s^4+a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4}, \tag{11}$$

unde: $a_0=T_1T_2T_3$; $a_1=T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3$; $a_1=T_1+T_2+T_3$ $a_3=1$;$a_4=0$.

1. Se obține funcția de transfer a SRA normalizată:

$$H_F(s)=\frac{\beta_0}{s^4+\alpha_3s^3+\alpha_2s^2+\alpha_1s+\alpha_0},$$

unde: $\alpha_0=0;\alpha_1=\frac{a_3}{a_0};\alpha_2=\frac{a_2}{a_0};\alpha_3=\frac{a_1}{a_0};\beta_0=\frac{k}{a_0}$. (12)

2. Se determină ecuația diferențială sub formă vectorial-matricială în realizarea standard controlabilă:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t), \tag{13}$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}\beta_0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x.$$

3. Verificăm controlabilitatea sistemului

$$rangU=rang\begin{bmatrix}b & bA & bA^2 & bA^3\end{bmatrix}=4, \tag{14}$$

deci sistemul este controlabil.

4. Se proiectează structura regulatorului

$$u(t)=-[k_1,k_2,k_3]\cdot[x_2,x_3,x_4]^T+k_0\varepsilon, \tag{15}$$

unde $\varepsilon=(r-y)$, r şi y sunt mărimile de referință şi de ieşire respectiv.

5. Se obține polinomul caracteristic al matricei *A:*

$$\varphi_A(s)=s^4+\alpha_3s^3+\alpha_2s^2+\alpha_1s+\alpha_0. \tag{16}$$

6. Se determină ecuația caracteristică dorită şi gradul maximal de stabilitate, în conformitate cu criteriul gradului maximal de stabilitate:

$$\varphi_c(s)=\prod_{k=1}^{2}(s-j\omega_k+J)(s+j\omega_k+J)=s^4+q_3s^3+q_2s^2+q_1s+q_0=0, \tag{17}$$

unde : $q_3=4J;\ q_2=\omega_1^2+\omega_2^2+6J^2;\ q_1=2J\omega_1^2+2J\omega_2^2+4J^3;\ q_0=\omega_1^2\omega_2^2+\omega_1^2J^2+\omega_2^2J^2+J^4$,

$$\alpha_1(a_i) = q_1(J, \omega_1, \omega_2),\ \omega_1 = \omega_2 = 0 \Rightarrow \frac{a_3}{a_0} = 4J^3 \Rightarrow J = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}. \tag{18}$$

7. În conformitate cu coeficienții ecuațiilor caracteristice $\varphi_c(s)$, $\varphi_A(s)$ şi formulele

$$k_0 = (q_0 - \alpha_0)/\beta_0;\ k_i = q_i - \alpha_i,\ i = 1,...,(n-1) \tag{19}$$

se determină expresiile pentru calculul vectorului de reacție:

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{a_0\left(\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2 J^2 + \omega_2^2 J^2 + J^4\right)}{k}, \\ k_1 &= 2J\omega_1^2 + 2J\omega_2^2 + 4J^3 - \frac{a_3}{a_0}, \\ k_2 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + 6J^2 - \frac{a_2}{a_0}, \\ k_3 &= 4J - \frac{a_1}{a_0}. \end{aligned} \tag{20}$$

4. Studii de caz şi simulare pe calculator

Presupunem că pentru automatizarea proceselor tehnologice, modelul matematic al obiectului condus este prezentat prin intermediul modelului obiectului cu inerție de gradul trei şi astatism:

$$H_F(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \tag{21}$$

unde k - factorul de amplificare; T_1, T_2, T_3 - constantele temporale ale obiectului. Pentru exemplificare, vom considera că parametrii modelului obiectului (21) obțin următoarele valori numerice:
$k = 5;\ T_1 = 0{,}7;\ T_2 = 1{,}5;\ T_3 = 2.$

Se cere de a realiza sinteza unui SRA în spațiul stărilor, ce include modelul obiectului condus (21), utilizând algoritmul de sinteză a sistemelor astatice în spațiul stărilor cu grad maximal de stabilitate pentru obiecte cu inerție şi astatism.
Luând în considerație parametrii funcției de transfer, obținem:

$$H_F(s) = \frac{5}{s(0{,}7s+1)(1{,}5s+1)(2s+1)} = \frac{5}{2{,}1s^4 + 5{,}45s^3 + 4{,}2s^2 + s},$$

unde: $a_0 = T_1T_2T_3 = 2{,}1;\ a_1 = T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3 = 5{,}45;\ a_2 = T_1 + T_2 + T_3 = 4{,}2;\ a_3 = 1;\ a_4 = 0.$
Funcția de transfer normalizată după a_0:

$$H_F(s) = \frac{\beta_0}{s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{2{,}3809}{s^4 + 2{,}5952s^3 + 2s^2 + 0{,}4762s},$$

unde: $\alpha_0 = 0; \alpha_1 = \frac{a_3}{a_0} = 0{,}4762; \alpha_2 = \frac{a_2}{a_0} = 2; \alpha_3 = \frac{a_1}{a_0} = 2{,}5952; \beta_0 = \frac{k}{a_0} = 2{,}3809.$

Ecuația în formă vectorial-matricială a sistemului proiectat în realizarea standard controlabilă are următoarea formă:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -0{,}4762 & -2 & -2{,}5952\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t),$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}2{,}3809 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x,$$

$$u(t)=-[k_1,k_2,k_3]\cdot[x_2,x_3,x_4]^T+k_0\varepsilon.$$

Verificăm controlabilitatea sistemului

$rangU = rang\begin{bmatrix}b & bA & bA^2 & bA^3\end{bmatrix} = 4$, deci sistemul este controlabil.

Utilizând expresiile (18) şi (20) calculăm gradul maximal de stabilitate şi coeficienții vectorului de reacție (pentru $\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0$).

$$J=\sqrt[3]{\frac{a_3}{4a_0}}=0{,}4919;$$

$$k_0=\frac{a_0J^4}{k}=0{,}0246;$$

$$k_1=4J^3-\frac{a_3}{a_0}=-0{,}0001;$$

$$k_2=6J^2-\frac{a_2}{a_1}=-0{,}5482;$$

$$k_3=4J-\frac{a_1}{a_0}=-0{,}6286.$$

În conformitate cu calculele efectuate şi modelul matematic al sistemului în formă vectorial-matricială elaborăm schema bloc structurală şi efectuaăm simularea în pachetul de programe KOPRAS.

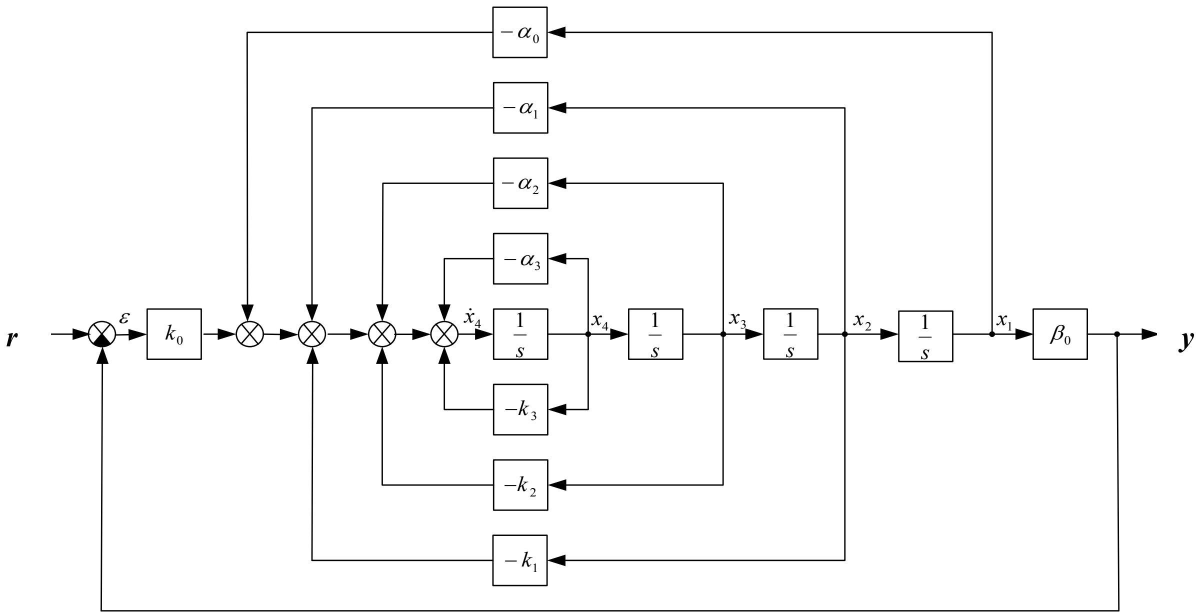

Fig.2. Schema bloc structurală a SRA în spațiul stărilor.

Pentru a putea aprecia rezultatele obținute în urma sintezei SRA în spațiul stărilor cu grad maximal de stabilitate, pentru comparație, vom utiliza metodele Ziegler-Nichols şi optimizării parametrice. Rezultatele calculelor sunt prezentate mai jos:

- Metoda Ziegler-Nichols: $k_p = 0{,}0701$.

- Metoda optimizării parametrice: $k_p = 0{,}0467$.

Pentru analiza performanțelor SRA sintetizat după metodele nominalizate mai sus, s-au efectuat simulări pe calculator a SRA utilizînd pachetul de programe KOPRAS. Rezultatele simulării sunt prezentate în figura 3. Numerotarea curbelor proceselor tranzitorii este următoarea: 1 - algoritmul de sinteză a sistemelor astatice în spațiul stărilor cu grad maximal de stabilitate pentru obiecte astatice, 2 - optimizarea parametrică, 3 - Ziegler-Nichols.

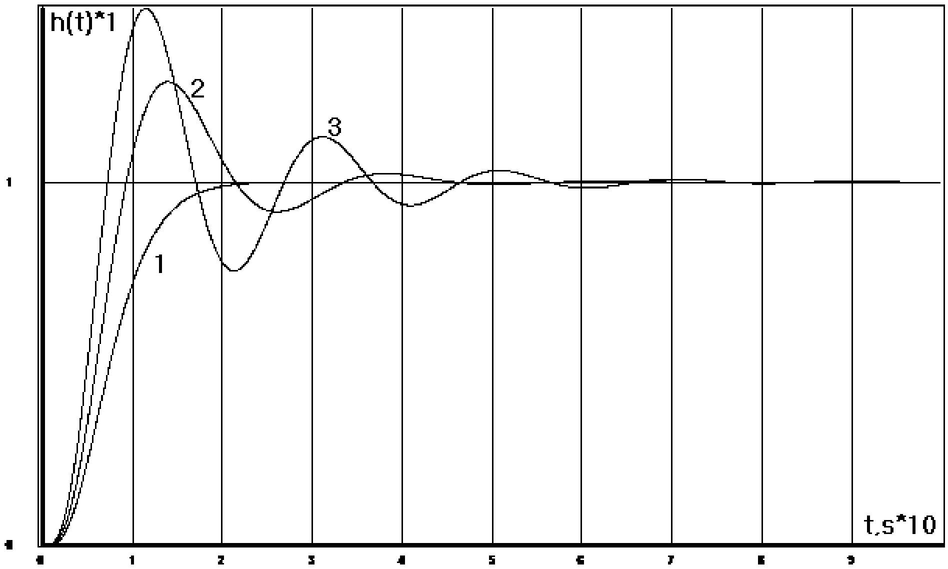

Fig. 3 Procese tranzitorii ale sistemului automat.

5. Concluzii

În lucrarea dată se propune un algoritm de sinteză a sistemelor astatice în spațiul stărilor, care permite de a determina şi impune anume acele valori proprii ale matricei de stare, care asigură gradul maximal de stabilitate al sistemului proiectat.

Totodată variind partea imaginară a rădăcinilor complexe ω_k sau gradul de stabilitate J putem să impunem sau să optimizăm performanțele procesului indicial al sistemului dinamic proiectat.

Metoda de proiectare propusă este o metodă simplă, iar datorită faptului că sistemul este prezentat în formă vectorial-matricială, algoritmul elaborat este uşor de implementat sub formă de programe pe calculator. Efectuând o analiză a rezultatelor simulării pe calculator a sistemului proiectat în conformitate cu metoda propusă şi, pentru comparație, cu metodele Ziegler-Nichols şi Optimizării Parametrice, observăm că sistemul sintetizat în baza criteriului gradului maximal de stabilitate posedă performanțe mai ridicate în ceea ce priveşte stabilitatea, suprareglajul şi durata regimului tranzitoriu.

Bibliografie

1. Pozna C. Teoria sistemelor automate. – Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2004. – 330 p.
2. Fiodorov I., Putere A.. Sinteza sistemelor dinamice în spațiul stărilor cu grad maximal de stabilitate / *Proceedings of the 7th International Conference on "Microelectronics and Computer Science",* Chişinău, sep. 22-24, 2011, Vol. 1, pp. 224-227.
3. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М: Наука, 1976. 424 с.