

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA
Universitatea Tehnică a Moldovei
Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică
Departamentul Ingineria Software și Automatică

Admis la susținere
Șef departament:
FIODOROV Ion dr., conf.univ.

„_____” _____ 2025

ANALIZA GRADULUI DE CONCORDANȚĂ A DISTRIBUȚIEI UNIFORME SIMULATE PE CALCULATOR CU DISTRIBUȚIA TEORETICĂ

Proiect de master

Studenta: _____ **Astafi Valentina, TI-231M**
Coordonator: _____ **Leahu Alexei, dr., prof. univ.**
Consultant: _____ **Cojocaru Svetlana, asist.univ.**

Chișinău, 2025

REZUMAT

Lucrarea de față analizează în detaliu rolul și importanța generatoarelor de numere pseudoaleatoare în simulările statistice și modelările probabilistice, cu un accent deosebit pe conformitatea cu distribuția uniformă teoretică. Întrucât simulările corecte și precise depind de calitatea generării numerelor pseudoaleatoare, studiul subliniază necesitatea validării riguroase a acestor generatoare prin teste statistice avansate.

Capitolul 1 introduce conceptele de bază legate de distribuția uniformă și de generatoarele de numere pseudoaleatoare (PRNG). Este prezentată evoluția istorică a tehnicilor de generare, de la metodele tradiționale la algoritmi moderni. Se subliniază necesitatea unui generator PRNG de înaltă calitate pentru obținerea de simulări statistice precise și prezintă contextul în care acestea sunt aplicate în diverse domenii.

Capitolul 2 analizează importanța concordanței între distribuțiile simulate și cele teoretice. Se discută necesitatea validării PRNG-urilor prin metode statistice pentru a asigura o bună uniformitate și acuratețe a rezultatelor în simulări. Se descrie cum distribuția uniformă formează baza simulării altor distribuții probabilistice și subliniază necesitatea îmbunătățirii continue a algoritmilor pentru generarea numerelor pseudoaleatoare.

Capitolul 3 explorează procesul de generare a numerelor pseudoaleatoare, evidențiind diversitatea algoritmilor și aplicațiilor utilizate pentru simularea unor distribuții uniforme. Sunt prezentate și analizate metodele utilizate în mai multe limbaje de programare și platforme populare, inclusiv Java, Python, R, C++, Random.org, Excel, Mathematica, precum și o abordare bazată pe cifrele numărului PI. Pentru fiecare metodă, sunt descriși atât algoritmi implementați, cât și caracteristicile specifice ale generatorului.

Capitolul 4 cuprinde analiza detaliată a concordanței numerelor pseudoaleatoare generate de diverse aplicații și limbaje de programare, cum ar fi Random.org, Mathematica, Java, Python și altele. Sunt aplicate mai multe teste statistice (Chi-pătrat, entropie și testele de corelație) pentru a evalua calitatea distribuției fiecărui set de date. Sunt analizate performanțele fiecărui generator și se stabilește un clasament final al celor mai fiabile opțiuni pentru aplicațiile ce necesită o distribuție uniformă stabilă și aleatorie.

Prin această cercetare, se subliniază importanța validării PRNG-urilor și a alegerii unui generator adecvat pentru asigurarea unei baze solide în orice simulare probabilistică, contribuind astfel la obținerea unor rezultate fiabile și precise în analiza statistică modernă. Rezultatele demonstrează că Random.org și R oferă o distribuție uniformă stabilă, făcându-le recomandabile pentru aplicațiile ce necesită o distribuție aleatorie autentică.

ABSTRACT

The present paper provides a detailed analysis of the role and importance of pseudo-random number generators in statistical simulations and probabilistic modeling, with particular emphasis on conformity to the theoretical uniform distribution. Since accurate simulations rely on the quality of pseudo-random number generation, this study highlights the necessity of rigorous validation of these generators through advanced statistical tests.

Chapter 1 introduces the fundamental concepts related to uniform distribution and pseudo-random number generators (PRNGs). It presents the historical evolution of generation techniques, from traditional methods to modern algorithms. The chapter emphasizes the need for high-quality PRNGs to achieve accurate statistical simulations and presents the contexts in which these generators are applied across various fields.

Chapter 2 analyzes the importance of concordance between simulated and theoretical distributions. It discusses the need for PRNG validation through statistical methods to ensure good uniformity and accuracy of simulation results. Additionally, it describes how the uniform distribution forms the foundation for simulating other probabilistic distributions and highlights the necessity of continuously improving algorithms for generating pseudo-random numbers.

Chapter 3 explores the process of pseudorandom number generation, highlighting the diversity of algorithms and applications used to simulate uniform distributions. Methods used in several popular programming languages and platforms are presented and analyzed, including Java, Python, R, C++, Random.org, Excel, Mathematica, as well as a numerical approach based on the PI number. For each method, both the implemented algorithms and the specific characteristics of the generator are described.

Chapter 4 includes a detailed analysis of the concordance of pseudorandom numbers generated by various applications and programming languages, such as Random.org, Mathematica, Java, Python, and others. Several statistical tests (Chi-square, entropy, and correlation tests) are applied to assess the quality of the distribution of each data set. The performances of each generator are analyzed and a final ranking of the most reliable options for applications requiring a stable and random uniform distribution is established.

Through this research, the importance of validating PRNGs and selecting a suitable generator is underscored to ensure a solid foundation for any probabilistic simulation, thereby contributing to reliable and precise results in modern statistical analysis. The findings demonstrate that values of the Random.org and R offer a stable uniform distribution, making them highly recommended for applications that require authentic random distribution.

CUPRINS

ABREVIERI ȘI DEFINIȚII	8
INTRODUCERE.....	9
1 GENERATOARELE DE NUMERE PSEUDOALEATOARE ȘI IMPACTUL LOR ASUPRA TEHNICILOR DE SIMULARE STATISTICĂ	10
1.1 Generatoarele de numere pseudoaleatoare	11
1.2 Scopul și obiectivele lucrării.....	12
1.3 Istoricul problemei.....	13
1.4 Algoritmi de generare a numerelor pseudoaleatoare	14
1.4.1 Clasificare după structura matematică	15
1.4.2 Clasificare după nivelul de securitate	19
1.4.3 Clasificare după perioada secvenței (lungimea secvenței înainte de repetare).....	20
1.4.4 Clasificare după aplicabilitate (domeniul de utilizare)	21
1.4.5 Clasificare după tipul sursei de entropie	22
1.5 Impactul generatoarelor asupra tehnicilor de simulare statistică.....	24
1.6 Distribuția uniformă	25
1.6.1 Distribuția uniformă discretă	27
1.6.2 Distribuția uniformă continuă	28
2 METODE STATISTICE DE EVALUARE A CONCORDANȚEI DATELOR.....	30
2.1 Metode bazate pe Analiza exploratorie a datelor	30
2.1.1 Seria statistică a frecvențelor relative caz discret	31
2.1.2 Reprezentări grafice în caz discret	32
2.1.3 Funcția empirică de distribuție.....	34
2.1.4 Media, moda și mediana, quartile și cuantilele	35
2.2 Metode bazate pe Analiza statistică inferențială.....	37
2.2.1 Estimatori punctuali pentru parametrii distribuțiilor	38
2.2.2 Caracteristici numerice de selecție și proprietățile lor	39
2.2.3 Estimatori de verosimilitate pentru parametrii distribuțiilor.....	39
2.2.4 Teste de verificare a ipotezelor statistice	40
2.2.5 Teste de verificare a ipotezelor despre medie și dispersie	41
2.3 Legea Numerelor Mari	42
2.4 Teorema Limită Centrală și v.a.i.i.d.....	43
3 GENERAREA NUMERELOR PSEUDOALEATOARE	44
3.1 Numărul minim de simulări.....	44

3.2	Generarea numerelor pseudoaleatoare în Java	45
3.3	Generarea numerelor pseudoaleatoare în Python	47
3.4	Generarea numerelor pseudoaleatoare în R	47
3.5	Generarea numerelor pseudoaleatoare în C++	48
3.6	Generarea numerelor pseudoaleatoare cu ajutorul generatorului Random.org.....	48
3.7	Generarea numerelor pseudoaleatoare în Excel	49
3.8	Generarea numerelor pseudoaleatoare în Mathematica.....	50
3.9	Cifrele numărului PI.....	50
4	ANALIZA CONCORDANȚEI NUMERELOR PSEUDOALEATOARE.....	51
4.1	Analiza exploratorie a datelor	52
4.2	Analiza gradului de potrivire.....	55
4.2.1	Testul Chi-pătrat	55
4.2.3	Estimatori de verosimilitate maximă	58
4.3	Coeficientul de corelație Pearson.....	58
4.4	Criteriul independenței.....	60
4.5	Criteriul entropiei	62
4.6	Erori și limitări metodologice	64
4.7	Analiza și interpretarea rezultatelor generale ale simulărilor.....	65
4.8	Resurse și instrumente utilizate	66
	CONCLUZII.....	68
	BIBLIOGRAFIE.....	69

ABREVIERI ȘI DEFINIȚII

AED - Analiza exploratorie a datelor.

ASI - Analiza statistică inferențială.

BBS (eng. Blum Blum Shub) - generator criptografic de numere pseudorandom.

CDF (eng. Cumulative Distribution Function) - Funcția de distribuție cumulativă.

CLT (eng. Central Limit Theorem) - Teorema Limită Centrală.

d.d - densitate de distribuție.

D-PRNG (eng. Deterministic Pseudo-Random Number Generators) - generatoare pseudo-aleatoare deterministe.

ECDF (eng. Empirical Cumulative Distribution Function) - funcția de distribuție cumulativă empirică.

f.d - funcție de distribuție.

HRNG (eng. Hybrid Random Number Generators) - generatoare aleatoare hibride.

IQR (eng. Interquartile Range) - intervalul intercuartil.

LCG (eng. Congruential Generator) - un generator de numere pseudorandom congruențial liniar.

LFG (eng. Lagged Fibonacci Generator) - un generator Fibonacci cu întârziere.

LLN (eng. Law of Large Numbers) - Legea Numerelor Mari.

MLE (eng. Maximum Likelihood Estimation) - estimatori de maximă verosimilitate.

PDF (eng. Probability Density Function) - funcție de densitate de probabilitate.

PRNG (eng. Pseudo-Random Number Generator) - generator de numere pseudoaleatoare.

TRNG (eng. True Random Number Generator) - generator de numere aleatorii reale.

v.a - variabila aleatoare

v.a.i.i.d. (eng. (independent and identically distributed) - variabile aleatoare independente, identic distribuite

INTRODUCERE

În era actuală modelarea probabilistă și simulările numerice sunt utilizate în diverse domenii științifice și industriale. Capacitatea de a genera numere pseudoaleatoare care să respecte anumite distribuții probabilistice este strict necesară pentru efectuarea acestor simulări. Astfel, distribuțiile probabilistice uzuale, cum ar fi distribuția uniformă, joacă un rol important în generarea acestor numere, fiind punctul de plecare pentru multe modele și algoritmi statistici.

Putem afirma, fără să exagerăm, că simularea oricărei distribuție probabiliste este imposibilă fără simularea prealabilă a distribuției uniforme. Drept confirmare servește metoda universală de simulare bazată pe funcția inversă a funcției de distribuție a v.a. simulate. Mai exact este demonstrat matematic ca funcția inversă funcției de distribuție a unei v.a. Y , privită ca funcție de v.a. X uniform distribuită pe $[0,1]$ este o nouă v.a. care are aceeași distribuție ca și v.a. Y pe care dorim să o simulăm. Deci, realizările acestei v.a. pot fi considerate realizări ale v.a. Y .

În concluzie, ținând cont de cele menționate mai sus, putem spune ca *gradul de concordanță a simulărilor valorilor oricărei v.a. Y cu distribuția ei teoretică depinde, implicit, de gradul de concordanță dintre simularea valorilor unei v.a. X uniform distribuită cu distribuția ei teoretică.*

BIBLIOGRAFIE

- [1] E. Avaroglu, T. Tuncer, A. B. Özer, și M. Türk, „A New Method for Hybrid Pseudo Random Number Generator”, *Journal of Microelectronics*, vol. 44, nr. 4, pp. 303–311, 2014.
- [2] Astafi V., Istrati D. L'interaction l'homme-machine, Conferința tehnico-științifică a studenților, masteranzilor și doctoranzilor, 1-3 aprilie 2020, Chișinău, Republica Moldova, vol. I, pp. 320–323. ISBN 978-9975-45-633-3. Data accesării: 19 septembrie 2024. [Online]. Disponibil la: <https://utm.md/wp-content/uploads/2020/05/UTM-CTS-SMD-2020-Volumul-I.pdf>.
- [3] J. Tashian, „A Brief History of Random Numbers”, Tashian. Data accesării: 5 septembrie 2024. [Online]. Disponibil la: <https://tashian.com/articles/a-brief-history-of-random-numbers/>.
- [4] B. Antunes, C. Mazel, și D. Hill, „Identifying Quality Mersenne Twister Streams for Parallel Stochastic Simulations”, în *2023 Winter Simulation Conference (WSC)*, San Antonio, TX, USA: IEEE, dec. 2023, pp. 2801–2812. doi: 10.1109/WSC60868.2023.10408699.
- [5] F. Koeune, „Pseudorandom Number Generator”, în *Encyclopedia of Cryptography and Security*, H. C. A. van Tilborg și S. Jajodia, Ed., Boston, MA: Springer US, 2011, pp. 995–996. doi: 10.1007/978-1-4419-5906-5_131.
- [6] V. Padányi și T. Herendi, „A study on comparison of pseudorandom number generator”, *International Journal of Mathematics and Computer in Engineering*, vol. 1, pp. 25–44, iun. 2023, doi: 10.2478/ijmce-2023-0003.
- [7] V. Beșliu, C. Pavel, I. Daniela. “Conception de systèmes d’information: Guide méthodologique pour les travaux pratiques (Normes, outils, indications méthodologiques et solutions proposées)” (2021), Data accesării: 15 octombrie 2024. [Online]. Disponibil la: <http://repository.utm.md/handle/5014/18440>.
- [8] M. D. Rich, *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates*. RAND Corporation, pp 600, 2001. ISBN-10: 0833030477; ISBN-13: 978-083303047.
- [9] J. Ehrhardt, „Generation of pseudorandom numbers”, *PubMed*, vol. 13, nr. 2, pp. 240-241, mar., 1986, doi: <https://doi.org/10.1118/1.595903>.
- [10] I. Vattulainen, K. Kankaala, J. Saarinen, și T. Ala-Nissila, „A comparative study of some pseudorandom number generators”, *Computer Physics Communications*, vol. 86, nr. 3, pp. 209–226, mai 1995, doi: [10.1016/0010-4655\(95\)00015-8](https://doi.org/10.1016/0010-4655(95)00015-8).
- [11] M. Aljohani, I. Ahmad, M. Basher, și M. O. Alassafi, „Performance Analysis of Cryptographic Pseudorandom Number Generators”, *IEEE Access*, vol. 7, pp. 39794–39805, 2019, doi: [10.1109/ACCESS.2019.2907079](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2907079).

- [12] Y. Huang, F. Zhang, Z. Liu, și H. Tian, „Pseudorandom number generator based on supersingular elliptic curve isogenies”, *Sci. China Inf. Sci.*, vol. 65, nr. 5, p. 159101, mai 2021, doi: [10.1007/s11432-019-2669-6](https://doi.org/10.1007/s11432-019-2669-6).
- [13] A. Levina, D. Mukhamedjanov, D. Bogaevskiy, P. Lyakhov, M. Valueva, și D. Kaplun, „High Performance Parallel Pseudorandom Number Generator on Cellular Automata”, *Symmetry*, vol. 14, nr. 9, Art. nr. 9, sep. 2022, doi: [10.3390/sym14091869](https://doi.org/10.3390/sym14091869).
- [14] P. K. Sigman, „Random Number Generators”. Columbia University. Data accesării: 9 septembrie 2024. [Online]. Disponibil la: <https://www.columbia.edu/~ks20/4106-18-Fall/Simulation-LCG.pdf>.
- [15] M. K. Chetry și W. B. V. Kandaswamy, „A Note on Self-Shrinking Lagged Fibonacci Generator”, *International Journal of Network Security*, vol. 11, nr. 1, pp. 58–60, iul. 2010, doi: [10.6633/IJNS.201007.11\(1\).09](https://doi.org/10.6633/IJNS.201007.11(1).09).
- [16] L. Blum, M. Blum, și M. Shub, „A Simple Unpredictable Pseudo-Random Number Generator”, *SIAM J. Comput.*, vol. 15, nr. 2, pp. 364–383, mai 1986, doi: [10.1137/0215025](https://doi.org/10.1137/0215025).
- [17] J. C. T. Arroyo, „An Improved Affine Cipher using Blum Blum Shub Algorithm”, *IJATCSE*, vol. 9, nr. 3, pp. 3295–3298, iun. 2020, doi: [10.30534/ijatcse/2020/126932020](https://doi.org/10.30534/ijatcse/2020/126932020).
- [18] G. G. Rose, „KISS: A bit too simple”, *Cryptogr. Commun.*, vol. 10, nr. 1, pp. 123–137, ian. 2018, doi: [10.1007/s12095-017-0225-x](https://doi.org/10.1007/s12095-017-0225-x).
- [19] S. C. Phatak și S. S. Rao, „Logistic map: A possible random-number generator”, *Phys. Rev. E*, vol. 51, nr. 4, pp. 3670–3678, apr. 1995, doi: [10.1103/PhysRevE.51.3670](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.3670).
- [20] S. Tan, J. Sun, Y. Tang, Y. Sun, și C. Wang, „Hyperchaotic bilateral random low-rank approximation random sequence generation method and its application on compressive ghost imaging”, *Nonlinear Dyn*, vol. 112, nr. 7, pp. 5749–5763, apr. 2024, doi: [10.1007/s11071-024-09317-0](https://doi.org/10.1007/s11071-024-09317-0).
- [21] A. Fog, „Chaotic Random Number Generators with Random Cycle Lengths”, *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, dec. 2015. Data accesării: 9 septembrie 2024. [Online]. Disponibil la: https://www.researchgate.net/publication/245642152_Chaotic_Random_Number_Generators_with_Random_Cycle_Lengths.
- [22] M. Singh, P. Singh, și P. Kumar, „An Empirical Study of Non-Cryptographically Secure Pseudorandom Number Generators”, în *2020 International Conference on Computer Science, Engineering and Applications (ICCSEA)*, Gunupur, India, mar. 2020, pp. 1–6. doi: [10.1109/ICCSEA49143.2020.9132873](https://doi.org/10.1109/ICCSEA49143.2020.9132873).

- [23] R. Hamza, „A novel pseudo random sequence generator for image-cryptographic applications”, *Journal of Information Security and Applications*, vol. 35, pp. 119–127, aug. 2017, doi: 10.1016/j.jisa.2017.06.005.
- [24] R. P. Brent, „From Mersenne Primes to Random Number Generators”, CiteSeerX, mai 2006. Data accesării: 9 septembrie 2024. [Online]. Disponibil la: <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=8bf8a51ec9e22d01dec1de971e4588227df38ea4>.
- [25] K. M. U. Maheswari, R. Kundu, și H. Saxena, „Pseudorandom Number Generators: Algorithms and Applications”, *Computer Science*, vol. 118, no. 22, 2018. Data accesării: 9 septembrie 2024. [Online]. Disponibil la: <https://acadpubl.eu/hub/2018-118-22/articles/22a/48.pdf>.
- [26] J. Wang, J. Pan and X. Wu, *The entropy source of pseudo random number generators: from low entropy to high entropy*, IEEE International Conference on Intelligence and Security Informatics (ISI) 2019, Shenzhen, China, 2019, pp. 161-163, doi: <https://doi.org/10.1109/ISI.2019.8823457>.
- [27] S. Yevseiev, „Development of a hardware cryptosystem based on a random number generator with two types of entropy sources”, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 5, nr. 9(119), Art. nr. 9(119), oct. 2022, doi: 10.15587/1729-4061.2022.265774.
- [28] I. Orlov, „Statistical Simulations Method in Applied Statistics”, vol. 85 iun. 2019, doi: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2019-85-5-67-79>.
- [29] R. Álvarez, F. Martínez, și A. Zamora, „Improving the Statistical Qualities of Pseudo Random Number Generators”, *Symmetry*, vol. 14, nr. 2, Art. nr. 2, feb. 2022, doi: 10.3390/sym14020269.
- [30] Statistical Simulation Method, *ScienceDirect*. Data accesării: 9 septembrie 2024. [Online]. Disponibil la: <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/statistical-simulation-method>.
- [31] R. Shimizu și J. S. Huang, „On a characteristic property of the uniform distribution”, *Ann Inst Stat Math*, vol. 35, nr. 1, pp. 91–94, dec. 1983, doi: 10.1007/BF02480966.
- [32] A. Leahu, *Tehnici de simulare statistică*. Curs pe suport electronic.
- [33] A. Dănciulescu, „Cursuri de statistică”, Data accesării: 9 septembrie 2024. [Online]. Disponibil la: <http://inf.ucv.ro/documents/danciulescu/curs1-curs2-curs3.pdf>.
- [34] R. Mihăilă, „Suport de curs: Statistica”, Data accesării: 9 septembrie 2024. [Online]. Disponibil la: https://epedagogie.md/pluginfile.php/1189/block_html/content/suport%20de%20curs_statistica_web.pdf.
- [35] A. Leahu, I. Pârtachi, „Probabilități statistice matematice (Prin exemple și probleme propuse), Partea II: Analiza inferențială a datelor statistice”. Chișinău, 2024.

- [36] E. Rothenstein. „Elemente de Teoria estimăției”, Data accesării: 10 septembrie 2024. [Online]. Disponibil la: <https://www.math.uaic.ro/~eduard/Capitolul%203.%20Teoria%20estimatiei.pdf>.
- [37] R. Strugariu, „Curs 10. Statistica inferențială”. Data accesării: 10 septembrie 2024. [Online]. Disponibil la: <http://math.etc.tuiasi.ro/rstrugariu/cursuri/SPD2016/c10.pdf>.
- [38] S. V. Kliegl Daniel Schad, Audrey Bürki, Reinhold, 2.2 The central limit theorem using simulation | Linear Mixed Models in Linguistics and Psychology: A Comprehensive Introduction. Data accesării: 18 octombrie 2024. [Online]. Disponibil la: https://vasishth.github.io/Freq_CogSci/the-central-limit-theorem-using-simulation.html.
- [39] I. Miller și M. Miller, John E. Freund’s Mathematical Statistics with Applications, 8th edition. Boston: Pearson, 2012.
- [40] M. Seidl, „New Random Generators in Java 17”. Data accesării: 22 octombrie 2024. [Online]. Disponibil la: <https://nttdata-dach.github.io/posts/ms-newrandomgeneratorsinjava17/>.
- [41] A. John, „How to Generate Random Numbers in Python”. Data accesării: 23 octombrie 2024. [Online]. Disponibil la: <https://aruljohn.com/blog/python-generate-random-numbers/>.
- [42] „Probabilities and Distributions | R Learning Modules”. Data accesării: 24 octombrie 2024. [Online]. Disponibil la: <https://stats.oarc.ucla.edu/r/modules/probabilities-and-distributions/>.
- [43] T. J. Quirk, M. H. Quirk, și H. F. Horton, „Random Number Generator”, în Excel 2016 for Physical Sciences Statistics: A Guide to Solving Practical Problems, T. J. Quirk, M. H. Quirk, și H. F. Horton, Ed., Cham: Springer International Publishing, 2016, pp. 21–34. doi: 10.1007/978-3-319-40075-4_2.
- [44] „Random Number Generation—Wolfram Language Documentation”. Data accesării: 12 noiembrie 2024. [Online]. Disponibil la: <https://reference.wolfram.com/language/tutorial/RandomNumberGeneration.html>.
- [45] Bailey, D. H., Borwein, J. M., & Plouffe, S. (1997). "The Computation of π to One Billion Digits." *Mathematics of Computation*, 66(219), 703-706.
- [46] „Pi-Search Results”. Data accesării: 12 noiembrie 2024. [Online]. Disponibil la: <https://www.angio.net/pi/bigpi.cgi>.
- [47] R. V. Hogg, J. W. McKean, and A. T. Craig, *Introduction to Mathematical Statistics*, 6th ed., Pearson Education, 2005.
- [48] Leahu A. *Analiza exploratorie a datelor, Notițe de curs (format electronic)*, Chișinău, 2018.
- [49] V. Astafi, „Analyse exploratoire du degré de concordance des données avec la distribution binomiale et géométrique simulée statistiquement en PYTHON”, 2024, Data accesării: 10 decembrie 2024. [Online]. Disponibil la: <http://repository.utm.md/handle/5014/28076>.

- [50] Leahu A. Pârțachi I. Probabilități, Statistică (Prin exemple și probleme propuse), Partea I, Notițe de curs, Chișinău, Ed. ASEM, 2021, ISBN 978-9975-155-91-5.
- [51] A. Agresti, Categorical Data Analysis, 3rd ed., Wiley, 2012.
- [52] A. I. Kobzar, Statistică matematică aplicată. Pentru ingineri și cercetători. Moscova, 2006.