DESPRE O VARIETATE LATICEALĂ

Ion NEGRU

Universitatea Tehnică a Moldovei

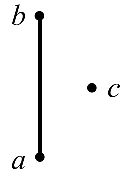
Abstract: *S-a introdus în studiu o anumită identitate laticeală. Varietatea laticelor determinată de această identitate nu este nici distributivă, nici modulară. S-au construit exemple de latici pe care identitatea respectivă este adevărată, precum şi exemple pe care ea se respinge.*

Cuvinte cheie: *Latice, identitate, varietate laticeală.*

Latice este o mulţime parţial ordonată în raport cu relaţia $\leq (sau \subseteq)$ în care pentru oricare elemente *a* şi *b* din mulţime sunt definite două operaţii: reuniunea şi intersecţia elementelor.

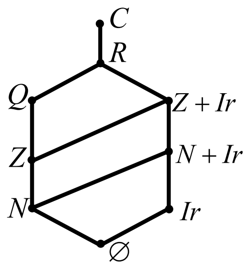
Mai jos operaţiile laticeale le notăm + şi ⊔, având în vedere că $(a+b)$ este cel mai mic element al laticei, astfel încât $a \leq a+b$ şi $b \leq a+b$, iar $a\square b$ (sau ab) este cel mai mare element al laticei, astfel încât $ab \leq a$ şi $ab \leq b$.

Elementele mulţimii parţial ordonate, sau ale laticei, uneori se prezintă prin diagramă (desen):



Explicaţia acestui desen: $a < b$, iar *a* şi *c*, *b* şi *c* sunt elemente incomparabile.

De exemplu, mulţimile de numere N, Z, Q, Ir, R, C au următoarea ordonare parţială: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C,\ Ir \subset R \subset C$; mulţimea numerelor iraţionale Ir este incomparabilă cu N, Z, Q. Aceste mulţimi generează laticea cu următoarea diagramă



Varietatea laticeală determinată de un număr finit de identităţi este mulţimea tuturor laticelor pe fiecare dintre care sunt adevărate identităţile determinatorii, precum şi următoarele identităţi adevărate pe orice latice:

$$x+y=y+x,\ xy=yx, x+(y+x)=(x+y)+z,\ x(yz)=(xy)z,\ x+x=x,\ xx=x,\ x+xy=x,$$
$$x(x+y)=x.$$

S-a introdus în studiu următoarea identitate laticeală

$$(x+y)(y+z)(z+x)=x(y+z)+y(z+x)+z(x+y) \tag{1}$$

Afirmația 1. Identitatea (1) este adevărată pe laticea diamant

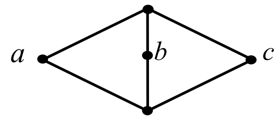


Fig. 1 *Laticea diamant*

Afirmația 2. Identitatea (1) este adevărată pe laticea pentagon

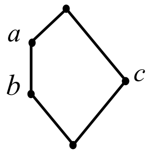


Fig. 2 *Laticea pentagon*

Din aceste două afirmații rezultă:

Afirmația 3. Varietatea laticelor determinată de identitatea (1) nu este nici distributivă, nici modulară [1]. Amintim, laticea L este distributivă, dacă $\forall x, y, z \in L$ are loc $x(y+z) = xy + xz$; laticea L este modulară dacă $\forall x, y, z \in L$ are loc $x(y + xz) = xy + xz$.

Afirmația 4. Pe următoarele latici identitatea (1) este adevărată:

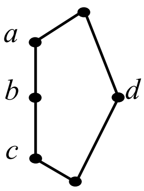


Fig.3

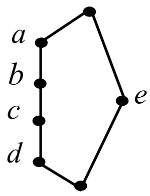


Fig.4

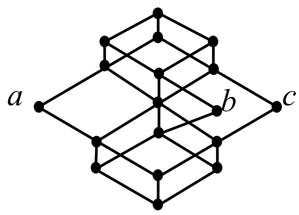


Fig.5

Afirmația 5. Pe fiecare latice, în care nu există minimum trei elemente, două cîte două incomparabile, identitatea (1) este adevărată.

Afirmația 6. Pe următoarele latici identitatea (1) nu este adevărată (se respinge):

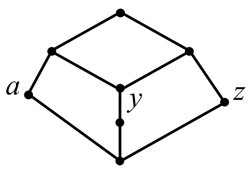


Fig. 6

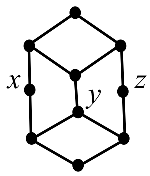


Fig. 7

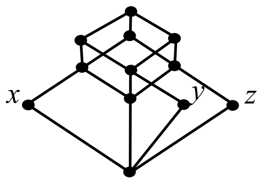


Fig. 8

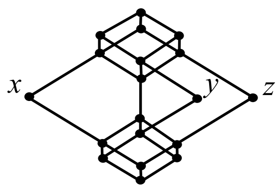


Fig. 9

Afirmația 7. Laticea cu cel mai mic număr de elemente, pe care identitatea (1) se respinge, este laticea din fig. 6.

Bibliografie

1. Скорняков Л. А. *Элементы теории структур.* Наука. Москва, 1978.