INTEGRALELE EULER ŞI APLICAŢII

Ecaterina PROCOPEŢ, Aurica POPESCU

Universitatea Tehnica a Moldovei

Abstract: *Leonard Euler (1707-1783) este fondatorul teoriei funcțiilor speciale- numite integralele Euler: Gamma funcția şi Beta funcția generalizează funcția factorială de valori neîntregi şi complexe ale lui n. Integralele Euler sunt tabelate şi reprezintă componenta distribuțiilor de probabilitate. Au o largă aplicabilitate la calculul rapid a integralelor definite, improprii, probleme la combinatorică,teoria probabilităților, statistică, mecanica fluidelor.*

Cuvinte cheie: *Beta funcția, Gamma funcția, aplicațiile integralelor speciale.*

Beta funcție, numită integrala Euler de primul tip, este o funcție specială de forma:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\ \left(p>0,\ q>0\right) \tag{1.1}$$

Pentru $p<1$ (1.1) reprezintă integrală improprie cu limita inferioară, iar pentru $p>1$ cu limita superioară.

Efectuînd substituția $x=\cos^2 x$:

$$B(p,q)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\,\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi\quad\left(p>0,\ q>0\right) \tag{1.2}$$

Numită a doua exprimare Beta funcția.

Substituind în (1.1) $x=\dfrac{t}{t+1}$, Beta funcție poate fi prezentată ca integrală improprie, numită a treia exprimare a funcției speciale:

$$B(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx$$

(1.3)

Gamma funcție sau integrala Euler de tip II:

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} e^{-1}t^{p-1}dx,\quad p>0 \tag{2.1}$$

Care este o integrală improprie cu limită de sus infinit şi pentru $p<1$ la limita de jos. Gamma funcția este integrală convergentă. Integrînd prin părți primim prima formulă de reducere pentru Gamma funcție:

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p),(p>0);\ \Gamma(1)=1;\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};\ \Gamma(n+1)=n!$$

$$B(p,1-p)=E(p);\ \ E(p)=\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}=\frac{\pi}{\sin p\pi} \tag{3.1}$$

Funcția Gamma şi Beta generalizează funcția factorial de valori neîntregi şi complexe ale lui n. Funcțiile speciale sunt componente a mai multor distribuții de probabilitate şi au aplicații în combinatorică, teoria numerelor, teoria probabilității şi statistică, mecanica fluidelor: în medicină-circulația sangvină, probleme aerodinamice aplicate la avioane şi automobile, hidraulica, oceonografia, meteorologia.

Exemple de calcul a integralelor cu aplicarea funcțiilor speciale:

1. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \textit{conform substituției avem}: (x = a\sqrt{t}) =$

$$\frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)\frac{1}{2}\,dt = \frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{a^4}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)} = \frac{a^4}{2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{a^4}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2 = \frac{a^4}{16}\pi .$$

2. Aria figurii mărginite de curba: $r^4 = \sin^3\theta\cos\theta$.
   Conform simetriei şi aplicînd formula de calcul al ariei în coordonate polare primim:

$$A = 2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}B\left(\frac{1}{4},1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}E\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

3. Aria figurii mărginite de curba $|x|^n + |y|^n = a^n$, $(n > 0,\ a > 0)$. Curba este simerică față de *Ox, Oy*.

   În primul cadran $x \geq 0,\ y \geq 0$ şi ecuația curbei $y = \left(a^n - x^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

$$A = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a\left(a^n - x^n\right)^{\frac{1}{n}}dx = \textit{conform substituției}: (x = at^{\frac{1}{n}}) =$$

$$4\frac{a^2}{n}\int_0^1(1-t)^{\frac{1}{n}}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt = 4\frac{a^2}{2n}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = 2\frac{a^2}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} = \frac{2a^2}{n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

Remarcăm că pentru $n=2,\ A=\pi a^2$.

Bibliografie:

1. Stănăşilă O. *Analiza matematică. Funcții speciale.* Bucureşti, 2001.
2. Никифоров А. Ф. *Основы теорий специальных функций.* Москва. Наука 2004.
3. Artin E. *The Gamma Function.* New York, Holt, 1994.