О СУММИРУЕМОСТИ МЕТОДОМ АБЕЛЯ СИСТЕМА СОБСЬВЕННЫХ И ПРИСОЕДЕНЕННЫХ ВЕКТОРОВ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ

Автор: Ион ГОРЮК

Технический Университет Молдовы

Абстракт: *В работе рассматриваются вопросы полноты части собственных и присоединенных векторов квадратичного операторного пучка* $L(\lambda)=\lambda^2C+\lambda B+E$ *в гильбертовом пространстве H. А также приведена теорема о суммируемости по Абелю части собственных и присоединенных векторов этого пуска.*

Ключевые слова: *гильбертовое пространство, вполне непрерывный оператор, собственный вектор и присоединенный к нему вектора, полная система векторов, суммируемая система векторов.*

1. Пусть A – вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и пусть λ его собственное число.

Согласно теореме Рисса, пространство H разлагается в прямую сумма двух инвариантных подпространств относительно A:

$$H=R_\lambda+m$$

где R_λ - конечномерное подпространство, образованное векторами $f\in Ker(A-\lambda E)^n$, для некоторого натурального числа n, а m - подпространство в котором оператор $A-\lambda E$ обратим.

Пусть $m_1=\dim R_\lambda$ и $K^{(\lambda)}$ - сужение оператора A на R_λ. В R_λ - возьмем базис, составленный из жардановых цепочек, состоящих и собственных и присоединенных к нему векторов оператора $K^{(1)}$.

Каждая такая цепочка $e^{(1)},e^{(2)},...,e^{(p)}$ имеет свойства

$$Ae^{(1)}=\lambda e^{(1)},\ Ae^{(2)}=\lambda e^{(2)}+e^{(1)},...,Ae^{(p)}=\lambda e^{(p)}+e^{(p-1)}$$

Рассматривая теперь последовательность всех ненулевых собственных чисел $\lambda_i\left(i=1,\ 2,\right)$ оператора A и составная базисы в каждом пространстве R_{λ_i}, построим систему векторов

$$\{e_s\},\qquad (s=1,2,....) \tag{1}$$

Существует система векторов, $\{g_i\}$, которая вместе с системой векторов (1) составляет биортогональную систему векторов. Эта система составлена из собственных и присоединенных векторов оператора A^*.

Пусть теперь $f\in H$ произвольный вектор и поставим в соответствие вектору f, ряд $f\sim\sum_{s=1}^{\infty}c_s,e_s$, где $e_k,e_{k+1},...,e_{k+r}$ - система собственного и присоединенных к нему векторов, соответствующая собственному числу λ_k и

$$C_{k+j}=\frac{\left(f,g_{k+r-j}\right)}{\left(e_{k+j},g_{k+r-j}\right)},\ \ 1\le j\le r$$

Этот ряд вообще расходится.

Пусть теперь $\alpha>0$ и рассмотрим многочлен

$$P_m^{\alpha}\left(z^{-1},t\right)=\frac{e^{tz^{-\alpha}}}{m!}\frac{d^m\left(e^{-tz^{-\alpha}}\right)}{dz^m} \quad m=0,1,2,... \text{ и составим ряд } \sum_{s=1}^{\infty}c_s\left(t\right)e_s$$

где $c_s\left(t\right)$ определяется следующим образом

1. если e_k- собственный вектор оператора A, который присутствует в системе (1), без присоединенных векторов, тогда

$c_k\left(t\right)=e^{-\lambda_k^{\alpha}t}c_k$ (λ_k - собственное число);

2. если же векторы $e_k,\ e_{k+1},...,\ e_{k+r}$ образуют жардановую цепочку, тогда

$$c_{k+j}\left(t\right)=e^{-\lambda_k^{\alpha}t}\sum_{m=0}^{r-j}P_m\left(\lambda_k,t\right)c_{k+j-m}$$

Заметим что $\lim\limits_{t\to 0}c_s\left(t\right)=c_s$

Определение:

Пусть ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty}c_s\left(t\right)e_s$, обладает последовательностью частичных сумм $S_{N\nu}\left(t\right)$, которая сильно сходится для любого $t>0$ и пусть

$$u\left(t\right)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{N_\nu+1}^{N_{\nu+1}}c_s\left(t\right)e_s\right).$$

Если $\lim\limits_{t\to 0}u\left(t\right)=f$, тогда скажем, что ряд $f \sim \sum\limits_{s=1}^{\infty}c_s\left(t\right)e_s$ суммируем методом Абеля *к* f. Обозначаем $\left(A,\ \lambda,\ \alpha\right)$.

Теорема 1. Лидский Б. В. $\left[1\right]$. Пусть A – вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H и пусть:

1. $A\in\sigma_p$;
2. $-\dfrac{\pi}{2\rho},\ \le\arg\left(Af,f\right)\le\dfrac{\pi}{2\rho'},\ \ \rho'>\max\left(p,\ \dfrac{1}{2}\right).$

Тогда для любого $f\in R\left(A\right)$ $\left(f=Ah,\ h\in H\right)$ соответствующий ряд $f \sim \sum\limits_{s=1}^{\infty}c_s\left(t\right)e_s$ суммируем методом $\left(A,\lambda,\alpha\right)$ к f для любого $\alpha,\ \rho'>\alpha\ge p$.

2. Рассмотрим квадратичный пучок $L\left(\lambda\right)=\lambda^2C+\lambda B+E$ операторов B и C в гильбертовом пространстве H,

Справедлива

Теорема 2. Пусть

1. $-\alpha<\arg\left(Cf,f\right)<\alpha$, где $0\le\alpha\le\alpha_0<\dfrac{\pi}{2}$;
2. оператор $C\in\sigma_p$, где $p\le p_0<\dfrac{\pi}{2\alpha_0}$ и $Ker\,C=\left\{0\right\}$;
3. $B>0$ и $\left\|B^{-1}\right\|\cdot\left\|B^{-1}C\right\|<\dfrac{1}{4}$.

Тогда система собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$, соответствующая его собственным числам, по модулю превосходящих число $\frac{1}{2\|B^{-1}C\|}$ суммируема методом Абеля в H.

Доказательство теорема основано на теорему 1 и изучение корня Z операторного уравнения

$Z^2 + BZ + C = 0$.

Теорема 3. Пусть оператора B и C, такие, что

1. $B^{-1} > 0,\ B^{-1} \in \sigma_p,\ p < \infty$;
2. $\|B^{-1}\|^2 \|C\| < \frac{1}{4}$.

Тогда:

а) система собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$, соответствующая его собственных числам $\lambda_j, |\lambda_j| < 2\|B^{-1}\|$ полна в *H.*

в) если еще

3. $-\alpha < \arg(Cf, f) < \alpha,\ 0 \le \alpha < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ и $Ker\ C = \{0\}$;
4. $p < p_0 < \frac{\pi}{2\alpha_0}$.

Тогда система собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$, соответствующая его собственным числам $L(\lambda): |\lambda_j| > \frac{1}{2\|B^{-1}C\|}$ суммируема методом Абеля в пространстве H.

Теорема 3: Пусть оператора B и C удовлетворяют условиям:

1. $\frac{\pi}{2\alpha} < \arg\left(B^1 Cf,\ f\right) < \frac{\pi}{\alpha}, \quad \alpha \ge \alpha_0 > 1$;
2. $B^{-1}C \in \sigma_p$, где $p \le \frac{\alpha_0}{2}$;
3. Оператор $B^{-1}C$ нигде не аннулируется;
4. $\|B^{-1}\|\|B^{-1}C\| < \frac{1}{4}$

Тогда система собственных и присоединенных векторов пуска $L(\lambda)$, соответстующая его собственным числам $\lambda_j, |\lambda_j| > \frac{1}{2\|B^{-1}C\|}$ полна в *H.*

Литература

1. Лидский В. Б. *«О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов».* Труды Московского Математического Общества Т. 11, 1962.
2. Горюк И. В. *«О факторизации квадратичного операторного пучка».* Вестник Московского Университета №5, 1970.
3. Гохберг И. И., Крейн М. Г. *«Введение в теорию несамосопряженных операторов».* Издательство «Наука», 1965.