METODA MEDIERII PROBLEMEI CLASICE PENTRU INCLUZIUNI DIFERENŢIALE ŞI DISCRETE STOCASTICE CU ÎNTÎRZIERE

Vladimir DRAGAN

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Se demonstrează teorema de mediere pentru ecuaţiile diferenţiale cu membrul drept multivaloric şi stocastic cu întîrziere .*

Cuvinte cheie: *Problema clasică, metoda medierii, incluziune cu întîrziere.*

Fie (Ω, U, P) spaţiul probabilistic complet, R^m spaţiul euclidian, $convR^m$ spaţiul tuturor submulţimilor compacte convexe din R^m dotat cu metrica Hausdorf h.

Examinăm problema clasică pentru incluziunea diferenţială stocastică cu întîrziere.

$$\dot{x}(t) \in \varepsilon F\ \left(\omega, t, x(t), x(t-h)\right),\ x(\omega, t) = \varphi(t),\ t \in [-h, 0],\ t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right],\ \omega \in \Omega, \tag{1}$$

unde $x \in convR^m$, $F\ : \Omega \times R^+ \times R^m \times R^m \to convR^m$, $\varepsilon > 0$ - parametru mic, $L > 0,\ h > 0,\ \varphi(\cdot)$ continuă împreună cu derivata sa în segmentul $[-h, 0]$.

Fie că pentru toţi $x \in R^m$ există media

$$F_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \int_\Omega F\ (\omega, t, x, x)\, dP(\omega) \right\} dt. \tag{2}$$

Aici integrala se calculează în sens Aumann, adică pe selecţii integrabile în sens Lebesque, iar convergenţa în sensul metricii *h*. Are loc principiul de mediere de tip Bogoliubov.

Punem în corespondenţă problemei clasice (1) problema mediată deterministă fără întîrziere

$$\dot{\xi}(t) \in \varepsilon F_0(\xi),\ \xi(0) = \varphi(0),\ t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]. \tag{3}$$

Teoremă 1. Fie că pentru toţi $t \ge 0, x\, y \in R^m$, $\omega \in \Omega$ au loc condiţiile:

1. aplicaţia $(\omega, t, x, y) \to F\ (\omega, t, x, y)$ este nevidă cu valori compacte convexe, continuă în (t, x, y) pentru fiecare $\omega \in \Omega$ şi ω - măsurabilă pentru fiecare $(t, x, y) \in [0, \infty) \times R^m \times R^m$, este uniform mărginită şi satisface condiţia Lipschitz în (x, y) cu constanta $\lambda \ge 0$, adică $h\left(F\ (\omega, t, x, y), \{0\}\right) \le M$, $h\left(F\ (\omega, t, x_1, y_1), F\ (\omega, t, x_2, y_2)\right) \le \lambda\left(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|\right)$, $x_i, y_i \in R^m,\ i = 1,2;\ \omega \in \Omega,\ t \ge 0.$
2. pentru fiecare $x \in R^m$ există media (2), care satisface următoarea condiţie

$$\lim_{T\to\infty} \int_\Omega h\left(\frac{1}{T} \int_0^T F\ (\omega, t, x, y)\, dt, F_0(x) \right) dP(\omega) = 0,$$

unde

$F_0 : R^m \to convR^m$ şi $h\left(F_0\left(x\right),F_0\left(y\right)\right) \le \lambda\|x-y\|,\ x,y \in R^m$.

3. pentru fiecare soluţie clasică (cu derivata continuă) $\xi(\cdot)$ al incluziunii (3), definită pentru toţi $L\varepsilon^{-1} \ge t \ge 0$ există aplicaţia univocă $\nu : \Omega \times R^+ \to R^m$ continuă în $t \in R$ pentru fiecare $\omega \in \Omega$ şi $\omega -$ măsurabilă pentru fiecare $t \ge 0$, astfel încât are loc incluziunea

$$\nu\left(\omega,t\right)+F_0\left(\xi\left(t\right)\right) \subseteq F\ \left(\omega,t\,\xi\left(t\right),\xi\left(t\right)\right),\ \omega \in \Omega,\ t \in \left[0,L\varepsilon^{-1}\right].$$

Atunci pentru orice $\eta > 0$ şi $L > 0$ există $\varepsilon > 0$, astfel încât pentru $\varepsilon \in \left(0,\varepsilon_0\right]$şi $t \in \left(0,L\varepsilon^{-1}\right]$ pentru orice soluţie clasică $\xi(\cdot)$ al incluziunii (2) există o soluţie clasică $x(\cdot,\cdot)$ stocastică al incluziunii (1) încât

$$\int\limits_{\Omega}\left\|x\left(\omega,t\right)-\xi\left(t\right)\right\|dP\left(\omega\right) \le \eta .$$

Fie acum incluziunea discretă stocastică cu întîrziere

$$\Delta x_n \equiv x_{n+1}-x_n \in \varepsilon F_n\left(\omega,x_n\left(\omega\right),x_{n-n_0}\left(\omega\right),\ x_{(p)}\left(\omega\right)=\varphi\left(p\right),\ p=\overline{-n_0,0}, \tag{4}$$

unde n_0 - natural fix, $n \in N$, $\varepsilon > 0$ - parametru mic, $\omega \in \Omega$.
Incluziunii stocastice discrete cu întîrziere (4) i se asociază incluziunea mediată

$$\Delta \xi_n \in \varepsilon F\ \left(\xi_n\right),\ \xi_0=\varphi\left(0\right),\ n=0,1,2,\dots,E\left(L\varepsilon^{-1}\right), \tag{5}$$

unde

$$F\ \left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_{\Omega}F_k\left(\omega,x,x\right)dP\left(\omega\right)\right\}. \tag{6}$$

Aici integrală multivocă $\int_{\Omega}F_k\left(\omega,x,x\right)dP\left(\omega\right)$ se calculează în sens Aumann, suma multivocă în sens Mincovschi, iar convergenţa în metrica Hausdorf h .

Teorema 2. Fie că pentru $n \in N$, $x \in R^m$, $\omega \in \Omega$ au loc condiţiile

1. şirul aplicaţiilor stocastice multivalorice $\left(\omega,x,y\right) \to F_n\left(\omega,x,y\right)$are valori nevide compacte convexe, este continue în x pentru fiecare $\omega \in \Omega$, ω- măsurabil pentru fiecare $x,y \in R^m$, este uniform mărginit şi satisface condiţiei Lipschitz cu constanta $\lambda > 0$în raport cu x şi y .

$$h\left(F_n\left(\omega,x,y\right),\left\{0\right\}\right) \le M,$$

$$h\left(F_n\left(\omega,x_1,y_1\right),F_n\left(\omega,x_2,y_2\right)\right) \le \lambda\left(\left\|x_1-x_2\right\|+\left\|y_1-y_2\right\|\right), M,\lambda - const > 0.$$

2. uniform în $x \in \mathcal{D} \subset R^m$ există limita (6) şi $F\ : \mathcal{D} \to \text{convR}^m$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega h\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} F_k(\omega,x,x), F\ (x)\right) dp(\omega)\right) = 0\,;$$

3. pentru orice soluţie ξ_n al incluziunii (5) există un şir de aplicaţii ω- măsurabile $\upsilon_n : \Omega \to R^m$ astfel încît pentru toţi $\omega \in \Omega$ şi $n = 0,1,2,...,E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$ are loc incluziunea $\upsilon_n(\omega) + F\ (\xi_n) \subseteq F_n(\omega,\xi_n,\xi_n)$.

Atunci pentru orice $\eta > 0$ şi $L > 1$ există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît pentru $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ şi orice $n = 0,1,2,...,E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$, pentru orice soluţie ξ_n al incluziunii (5) există o soluţie stocastică $x_n(\omega)$ al incluziunii (4), care satisface inegalitatea

$$\int_\Omega \left\| x_n(\omega) - \xi_n \right\| dP(\omega) \le \eta$$

Pentru incluziunile integro-diferenţiale precum şi cele cu sumo-diferenţe de tipul:

$$\dot{x} \in \varepsilon F\ \left(\omega,t,x(t),x(t-h),\int_0^t \varphi(t,s,x(s))ds\right), x(\omega,t) = \varphi(t), t \in [-h,a] \tag{7}$$

respectiv

$$\Delta x_n\left(-\varepsilon F_n\left(\left(\omega,x_n,x_{n-n_0},\sum_{s=0}^{n}\varphi_{n,s}(x_s)\right), x_p = \varphi(p),\ p = \overline{-n_0,0},\right.\right. \tag{8}$$

Sunt elaborate şi fundamentate diverse scheme de mediere şi congelare, în dependenţă de modul de utilizare a nucleului integral

$$K_a^*(t) = \int_0^t \varphi(t,s,a)ds \text{ sau } K_a^\infty(t) = \int_0^\infty \varphi(t,s,a)ds, \quad a \in R^m$$

respectiv, celui cu sume $K_n^*(a) = \sum_{s=0}^{n}\varphi_{n,s}(a)$ sau $K_n^\infty(a) = \sum_{s=0}^{\infty}\varphi_{n,s}(a),\ a \in R^m$

<u>Schema 1 şi 2 de mediere.</u>

Fie că există una din următoarele medii în timp şi probabilitate

$$F_{*(\infty)}(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left\{\int_\Omega F\ \left(\omega,t,x,x,K_x^{*(\infty)}(t)\right)dp(\omega)\right\}dt,\ x \in R^m. \tag{9}$$

Asociem problema (7) cu una din problemele mediate:

$$\dot{\xi} \in \varepsilon F_{*(\infty)}(\xi),\ \xi(0) = \varphi(0). \tag{10}$$

Incluziunii (8) îi putem asocia una din incluziunile mediate

$$\Delta\xi_n \in \bar{F}_{*(\infty)}(\xi_n), \quad \xi_0 = \varphi(0), \tag{11}$$

unde

$$\bar{F}_{*(\infty)}(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\left\{\int_\Omega F_m\left(\omega, x, x, K_m^{*(\infty)}(x)\right)dp(\omega)\right\} \tag{12}$$

În cazul în care mediile (9) sau (12) nu există, asociem claselor de incluziuni (7) respectiv (8) incluziunile stocastice diferențiale

$$\dot{\xi}_{(t)} \in \varepsilon F\left(\omega, t, \xi(t), \xi(t), \int_0^t \varphi\left(t, s, \xi(t)\right)ds\right) \tag{13}$$

sau

$$\dot{\xi}(t) \in \varepsilon F\left(\omega, t, \xi(t), \xi(t), \int_0^\infty \varphi\left(t, s, \xi(t)\right)ds\right) \tag{14}$$

iar incluziunii cu diferențe finite (8) îi asociem incluziunea cu diferențe finite

$$\Delta\xi_n \in \varepsilon F_n\left(\omega, \xi_n, \xi_n, \sum_{s=0}^{n}\varphi_{n,s}(\xi_n)\right)\xi(0) = \varphi(0) \tag{15}$$

sau incluziunea discretă de forma

$$\Delta\xi_n \in \varepsilon F_n\left(\omega, \xi_n, \xi_n, \sum_{s=0}^{\infty}\varphi_{n,s}(\xi_n)\right), \ \xi(0) = \varphi(0) \tag{16}$$

Menționăm, că clasele de incluziuni (13) – (16), se obțin în conformitate cu principiul de congelare (fixare) sub semnul nucleului integral, respectiv, cu suma a funcției necunoscute $x(s)$, pentru $s = t$, respectiv $s = n$.

Bibliografie

1. Драган В. Л. *К усреднению стохастических дифференциальных и разностных включений с классическими решениями.* Материалы Международной Конференции Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры (DE&CAS 2005) часть 1. Минск, 2005, стр. 110-113.
2. Dragan V., Tutunaru V. *Fundamentarea metodelor de mediere şi congelare pentru problema clasică în cazul incluziunilor integrale*. Conferința Tehnico-ştiințifică a Colaboratorilor, Doctoranzilor şi Studenților consacrată celei de a 40-a Aniversare a Doctoranturei UTM, 17-18 noiembrie, 2006 Chişinău, Vol. II, 244-245 p.
3. Dragan V. *Teorema de tip Filippov pentru incluziuni cu diferențe finite.* Simpozionul „Fizica în procesul de instruire” . Conferința Tehnico-ştiințifică a Colaboratorilor, Doctoranzilor şi Studenților UTM, Chişinău, 17 noiembrie, 2005, Vol.1, 24-25 p.