

Vasile MORARU

METODE NUMERICE

MANUAL

$$A_k - \alpha_k I = Q_k R_k, A_{k+1} = R_k Q_k + \alpha_k I \quad T_n(x) = \cos(\arccos(x))$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \left(f(x_i) \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right) \quad \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + d \quad \text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \quad Q^T A Q = S$$

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}) \quad x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + d$$

Chişinău
2024

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
FACULTATEA CALCULATOARE, INFORMATICĂ
ȘI MICROELECTRONICĂ
DEPARTAMENTUL INFORMATICĂ ȘI INGINERIA
SISTEMELOR

Vasile MORARU

METODE NUMERICE

MANUAL



2024

CZU 519.61/.65(075.8)

M 89

Lucrarea a fost discutată și aprobată pentru editare la ședința Senatului UTM, proces-verbal nr.6 din 19.12.2023.

În lucrare sunt expuse principalele metode de calcul numeric pentru rezolvarea unor probleme ce pot fi întâlnite frecvent în practică. Manualul este destinat în primul rând studenților, constituind un sprijin efectiv la predarea cursurilor *Metode numerice*, *Cercetări operaționale*, *Matematică de calcul*, *Analiză numerică*, *Programare matematică* ș.a., dar poate fi folosit și de toți cei care sunt preocupați de utilizarea metodelor numerice și a mijloacelor electronice de calcul la soluționarea problemelor practice.

Autor: prof. univ., dr. Vasile MORARU

Recenzenți: prof. univ., dr. hab. Emilian GUȚULEAC
conf. univ., dr. Anatol GODONOGA

DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII DIN RM

Moraru, Vasile.

Metode numerice: manual / Vasile Moraru; Universitatea Tehnică a Moldovei, Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică, Departamentul Informatică și Ingineria Sistemelor.

– Chișinău: Tehnica-UTM, 2024. – 269 p.: fig.

Referințe bibliogr.: p. 265-267 (44 tit.). – 100 ex.

CUPRINS

LISTA DE NOTAȚII.....	6
NOȚIUNI INTRODUCTIVE.....	7
1. NUMERE APROXIMATIVE.....	15
1.1. ERORI ABSOLUTE ȘI ERORI RELATIVE	15
1.2. PROPAGAREA ȘI SURSELE ERORILOR.....	17
1.3. NUMERE ÎN VIRGULĂ MOBILĂ	20
1.4. ARITMETICA VIRGULEI MOBILE ȘI ERORILE DE ROTUNJIRE	24
1.5. DETERMINAREA PARAMETRIILOR UNUI SISTEM DE CALCUL	28
1.6. EFECTUL ERORILOR DE ROTUNJIRE.....	30
1.7. EXERCIȚII	36
2. REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR ALGEBRICE ȘI TRANSCENDENTE.....	38
2.1. INTRODUCERE.....	38
2.2. SEPARAREA RĂDĂCINILOR	40
2.3. METODA ÎNJUMĂȚĂRII INTERVALULUI	47
2.4. METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE	50
2.5. CRITERII DE OPRIRE ÎN METODELE ITERATIVE	58
2.6. METODA LUI NEWTON (METODA TANGENTEI)	60
2.7. METODA SECANTEI	66
2.8. REZOLVAREA ECUAȚIILOR ALGEBRICE	70
2.9. ALTE METODE NUMERICE.....	77
2.10. EXERCIȚII	81
3. METODE NUMERICE ÎN ALGEBRA LINIARĂ.....	85
3.1. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATRICEALĂ.....	85
3.2. SISTEME DE ECUAȚII ALGEBRICE LINIARE	95
3.3. METODA ELIMINĂRII A LUI GAUSS.....	99
3.4. FACTORIZAREA LU.....	108
3.5. FACTORIZAREA CHOLESKY	114
3.6. PERTURBAȚII. NUMĂRUL DE CONDIȚIONARE	118
3.7. CALCULUL VALORILOR ȘI VECTORILOR PROPRII	125
3.8. METODE ITERATIVE DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE	149
3.9. SISTEME LINIARE SUPRADETERMINATE ȘI METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE	158
3.10. EXERCIȚII	165

4.	SISTEME DE ECUAȚII NELINIARE ȘI OPTIMIZAREA NECONDIȚIONATĂ ..	170
4.1.	INTRODUCERE.....	170
4.2.	METODA ITERAȚIEI ȘI METODA GAUSS-SEIDEL NELINIARĂ.....	171
4.3.	METODA NEWTON PENTRU REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII NELINIARE ...	179
4.4.	FUNȚII CONVEXE.....	184
4.5.	CONDIȚIILE DE EXTREM ÎN OPTIMIZAREA NECONDIȚIONATĂ.....	190
4.6.	METODA GRADIENTULUI.....	196
4.7.	METODA NEWTON-RAPHSON	203
4.8.	METODE CVASI-NEWTON	208
4.9.	METODE DE DIRECȚII CONJUGATE	215
4.10.	EXERCIȚII	228
5.	INTERPOLAREA FUNCȚIILOR	233
5.1.	FORMULAREA PROBLEMEI.....	233
5.2.	POLINOMUL DE INTERPOLARE LAGRANGE	235
5.3.	ESTIMAREA ERORII ABSOLUTE A INTERPOLĂRII.....	238
5.4.	ALEGEREA NODURILOR DE INTERPOLARE.....	239
5.5.	POLINOMUL DE INTERPOLARE NEWTON	242
5.6.	INTERPOLAREA CU FUNCȚII SPLINE	246
5.7.	EXERCIȚII	255
	RĂSPUNSURI, INDICAȚII	256
	BIBLIOGRAFIE	265

PREFAȚĂ

Metodele de calcul numeric au pătruns eficient în toate domeniile științei, tehnicii și economiei. Cursurile corespunzătoare se predau studenților instituțiilor de învățământ superior cu profil tehnic și economic, matematicienilor și fizicienilor, precum și celor care doresc să se inițieze în aplicarea metodelor numerice și mijloacelor electronice de calcul la rezolvarea problemelor ce se întâlnesc des în practică. Lucrarea însumează activitatea autorului de-a lungul anilor în calitate de titular al cursului *Metode numerice* (a se vedea lucrările [25, 26, 27, 28]), curs inclus în planul de învățământ al studenților de la Facultatea de Calculatoare, Informatică și Microelectronică, Universitatea Tehnică a Moldovei.

Lucrarea este structurată astfel: introducere, cinci capitole în care sunt prezentate principalele metode de calcul numeric, bibliografie. Un loc important îl ocupă rezolvarea numerică a ecuațiilor și a sistemelor de ecuații neliniare, a sistemelor de ecuații liniare și neliniare, a problemelor de optimizare necondiționată. Se propun spre soluționare exerciții rezolvate sau însoțite de indicațiile corespunzătoare.

Pentru înțelegerea materialului de bază sunt suficiente cunoștințele pe care studenții le-au obținut la cursurile de matematică și programare.

În *Noțiuni introductive* sunt expuse primele concepții despre metodele numerice și algoritmi de calcul, se fac estimări privind viteza de convergență a acestora.

Capitolul întâi este dedicat aproximării numerelor reale prin reprezentări computaționale finite cu ajutorul virgulei mobile și erorilor care le implică. Prin exemple simple se arată că erorile de rotunjire, propagându-se de la o operație aritmetică la alta, pot conduce la rezultate eronate.

În *capitolul al doilea* sunt prezentate metode numerice de calcul al rădăcinilor ecuațiilor algebrice și transcendente. Este vorba de metoda înjumătățirii intervalului, metoda

aproximațiilor succesive, metoda tangentei (Newton), metoda secantei și alte metode numerice. Un loc aparte îl ocupă ecuațiile algebrice, istoria cărora începe cu Evul Mediu și cu Renașterea. Este expusă schema lui Horner și metoda Newton de determinare a tuturor rădăcinilor reale ale ecuațiilor algebrice.

Capitolul al treilea, destinat metodelor algebrei liniare, pune la îndemâna cititorului atât elemente de analiză matriceală, cât și algoritmi cei mai reprezentativi ce intervin în problemele de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare și de calcul al valorilor și vectorilor proprii. Sunt expuse metodele directe și iterative de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare (metoda Gauss și metoda Cholesky cu factorizările sale triunghiulare, metoda Jacobi, metoda Gauss-Seidel, metode de ortogonalizare ș.a.), făcându-se totodată aprecieri asupra eficacității și stabilității numerice a acestora. Se subliniază faptul că metodele bazate pe transformări de asemănare ortogonală sunt mai eficiente decât metodele clasice de determinare a valorilor și vectorilor proprii.

În *capitolul al patrulea* sunt date principalele metode numerice de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare și a problemelor de optimizare necondiționată. Problema de optimizare se poate reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații, și invers. De aceea, s-a considerat necesar a expune în cadrul aceluiași capitol metodele menționate. Se tratează metoda iterației, metoda Gauss-Seidel neliniară, metoda Newton, metode care sunt o extindere a metodelor studiate în capitolele doi și trei. Tot aici cititorul este familiarizat cu noțiunea de funcție convexă folosită pe larg în optimizarea condiționată. Sunt expuse condițiile necesare și suficiente de extrem în optimizarea necondiționată. Se face o trecere în revistă a metodei gradientului, metodei Newton-Raphson, metodelor cvasi-Newton și a metodelor de direcții conjugate, punându-se în evidență cea mai eficientă metoda Fletcher-Powell în versiunea Polak-Ribiere.

În *capitolul al cincilea* se tratează problema interpolării polinomiale. Se prezintă polinomul de interpolare Lagrange, polinomul de interpolare Newton (cu diferențe divizate) și funcțiile spline în vederea utilizării acestora în aproximarea funcțiilor date tabelar. Se discută problema alegerii nodurilor de interpolare care permit minimizarea erorii absolute a interpolării.

Bibliografia include referințele în care cititorul poate găsi detalii suplimentare asupra metodelor numerice de calcul prezentate în lucrare. Unele date bibliografice au fost incluse chiar în text. Menționăm că din mulțimea cărților editate în limba română se fac trimiteri doar la sursele pe care le-a avut la îndemână autorul în timpul scrierii lucrării.

BIBLIOGRAFIE

1. Bazara M.S., Sheraly H.D., Shetty C.M. *Nonlinear programming. Theory and algorithms. Third Edition.* Wiley-Interscience, 2013. - 853 p.
2. Berbente C., Mitran S., Zancu S. *Metode numerice.* București: Editura Tehnică, 1998. - 300 p.
3. Brătianu C., Bostan V., Cojocia L., Negreanu G. *Metode numerice.* București: Editura Tehnică, 1996. - 212 p.
4. Bucur C.M., Popeea C.A., Simion Gh. *Matematici speciale. Calcul numeric.* București: Editura didactică și pedagogică, 1983. - 232 p.
5. Buneci M.R. *Metode numerice – aspecte teoretice și practice.* Târgu-Jiu: Editura Academia Brâncuși, 2009. - 284 p.
6. Burden R.L., Faires J.D. *Numerical Analysis. 9th Edition,* Boston, USA, 2011. - 895 p.
7. Buzurniuc Șt., Moraru V. *Informatica: elemente de calcul numeric.* Chișinău: Editura “Evrca”, 2000. - 114 p.
8. Ciarlet P.Ph. G., Lions J.L. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* 5ème édition. Dunod, 2007. - 296 p.
9. Dennis J.E., Schnabel R.B. *Numerical methods for un constrained optimization and nonlinear equations.* Prentice-Hall, 1983. SIAM's Classics in Applied Mathematics series, 1996. - 395 p.
10. Dinu M., Linga Gh. *Algoritmi și teme speciale de analiză numerică.* București: Editura MatrixRom, 1999. - 246 p.
11. Fortin A. *Analyse numérique pour ingénieurs, quatrième édition.* Presses internationales Polytechnique, Laval, 2011. - 475 p.
12. Fosythe G., Malcolm M., Moler C. *Computer Methods for Mathematical Computations.* Prentice-Hall, 1977. - 259 p.
13. Gill Ph., Murray M., Wright M. *Practical optimization.* Academic Press, 1997. - 421 p.
14. Gill Ph., Murray W., Wright M. *Numerical linear algebra and optimization.* SIAM, Book Series Name: Classics in Applied Mathematics, 2019. - 426 p.
15. Hadâr A., Petre Cr., Marin C., Voicu A. *Metode numerice în inginerie.* București: Politehnica Press, 2004. - 270 p.

16. Hageman L., Young D. *Applied iterative methods*. Academic Press, 1981. - 404 p.
17. Hoffman J. *Numerical Methods for Engineers and Scientist. Second Edition*. McGrawHill, New York, 2001. - 825 p.
18. Horn R., Johnson Ch. *Matrix analysis. Second Edition*. Cambridge University Press, 2013. - 662 p.
19. Iorga V., Jora B., Nicolescu Cr., Lopătan I., Fătu I. *Programare numerică*. București: Editura Teora, 1996. - 256 p.
20. Lankaster P., Tismenetsky M. *Theory of matrices. Second edition with applications*. Academic Press, New-York-London, 1985. - 570 p.
21. Larionescu D. *Metode numerice*. București: Editura Tehnică, 1989. – 224 p.
22. Lawson Ch., Hanson R. *Solving least squares problems*. Prentice-Hall, 1974. Classics in Applied Mathematics series. - 360 p.
23. Marinescu Gh., Rizzoli I., Popescu I., Ștefan C. *Probleme de analiză numerică rezolvate cu calculatorul*. București: Editura Academiei Republicii România, 1987. - 264 p.
24. McCracken D., Dorn W. *Numerical Methods and Fortran Programming*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1964, Second corrected printing, Wiley 1968. - 457 p.
25. Moraru V. *Elemente de calcul numeric și optimizări: note de curs*. Chișinău: Secția Redactare și Editare a UTM, 2009. - 304 p.
26. Moraru V. *Metode numerice în algebra liniară. Ciclul de prelegeri*. Chișinău: Editura Cartea universitară UTM, 1995. - 80 p.
27. Moraru V. *Numere cu virgulă mobilă. Material didactic*. Chișinău: Departamentul Editorial-poligrafic al UTM, 1998. - 28 p.
28. Moraru V., Popescu A. *Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare și a problemelor de optimizare necondiționată. Ciclul de prelegeri*. Chișinău: Departamentul Editorial-poligrafic al UTM, 1997. - 88 p.
29. Parlett B. *The symmetric eigenvalue problem*, SIAM, 1980. Reprint in 1998 in Philadelphia Pa by SIAM. - 398 p.
30. Rice John. *Matrix computations and mathematical software*. McGraw-Hill Companies, 1981. - 248 p.
31. Secrieru G.V., Secrieru I.V. *Analiză numerică*. Chișinău:

Editura Știința, 1985. - 206 p.

32. Shoup T.E. *Applied Numerical Methods for Microcomputers*, Prentice-Hall, 1984. - 262 p.

33. Strang Gilbert. *Linear algebra and its applications*. Academic Press, Edition 2016. – 454 p.

34. Șabac I.Ch., Cocârlan P., Stănășilă O., Topală A. *Matematici speciale*. Vol.II. București: Editura didactică și pedagogică, 1983. - 224 p.

35. Toma M., Odăgescu I. *Metode numerice și subrutine*. București: Editura Tehnică, 1980. - 215 p.

36. Zaharia S.E., Bogoi A. *Metode numerice pentru rezolvarea problemelor ingineresti* (eBook PDF). Colecția Curs Universitar. Editura Letras, 2020. - 404 p.

37. Бабенко И.С. *Основы численного анализа*. М.: Наука, 2002. - 848 p.

38. Бахвалов И.С. Жидков И.П. Кобельков Г. *Численные методы*. 9-е издание М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. - 636 p.

39. Василиев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач*. Издание второе. М.: Наука, 1988. - 552 p.

40. Воеводин В.В. *Вычислительные основы линейной алгебры*. М.: Наука, 1977. - 303 p.

41. Волков Е.А. *Численные методы: учебное пособие для вузов*. 7-е издание, стер. Санкт-Петербург: Лань, 2022. - 252 p.

42. Икрамов Х.Д. *Численное решение матричных уравнений*. М.: Наука, 1984. - 190 p.

43. Калиткин И. Н. *Численные методы*. М.: Наука, 1978. - 512p.

44. Поляк Б.Т. *Введение в оптимизацию*. Издание второе. М.: Наука, 2014. - 392 p.