

# STUDIUL ELEMENTELOR ÎNCOVOIATE DIN BETON ARMAT

Teodor SÂRBU, Alexandru CÎRLAN

Universitatea Tehnică a Moldovei

**Abstract:** În normativele diferitor țări putem găsi propuneri de trecere de la digrama curbilinie efort unitar – deformație specifică, la unele diagrame simplificatoare, una din acestea fiind diagrama dreptunghiulară. Determinând ariile și momentul static a zonei comprimate pentru fiecare din diagramele propuse, și cunoscând că valoarea lățimii dreptunghiului este rezistența betonului la compresiune putem determina valoarea înălțimii acestuia, totodată comparând rezultatul obținut cu cele propuse de normative și publicațiile științifice de profil.

**Cuvinte cheie:** diagrama  $\sigma$ - $\varepsilon$ , zonă comprimată,

## 1. Introducere

Conform p.3.7.1 [3], diagrama  $\sigma$  -  $\varepsilon$ , este reprezentată sub formă de relație descrisă de ecuația:

$$\frac{\sigma_c}{R_c} = \frac{kn - n^2}{1 + (k - 2)n}, \quad n = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}; \quad k = (1,1E_{c,nom}) \frac{\varepsilon_{c1}}{R_c}; \quad (1)$$

unde:

$R_c$  - rezistența medie a betonului la compresiune, valoare căruia poate fi calculată cu formula  $R_c = R_c^{prism} \cdot \gamma_{c,om} / 0,7 \cdot \gamma_{ci} = R_c^{prism} \cdot 1,3 / 0,7 \cdot 0,7786$ , unde  $R_c^{prism}$  - rezistența prismatică a betonului la compresiune;

$\varepsilon_{c1} = 0,0022$  - deformația specifică totală a betonului la tensiunea maximă (de rupere) la compresiune; valoarea căreia se ia din Tabelul 7 [3];

$E_{c,nom} = nE_{init}$  - modulul de deformație nominal tăietor, determinat prin unghiul dintre linia orizontală și linia care trece prin punctul  $0,4R_c$  plasat pe curbă; conform p.3.1.4 (2) [2],  $E_{c,nom} = 1,05 \cdot E_{init}$ ;

$E_{init}$  - modulul de deformație inițial, valoarea căreia se ia din Tabelul 8 [3].

Practic aceeași formulă o găsim și în normativele europene, p.3.1.5 [2], valabilă pentru intervalul  $0 < |\varepsilon_{c1}| < |\varepsilon_{cul}|$ :

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta}, \quad \eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}; \quad k = (1,05E_{cm}) \frac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}}; \quad (2)$$

unde:

$\varepsilon_{c1}(\text{‰}) = 0,7 f_{cm}^{0,31} < 2,8$  - deformație specifică la compresiune a betonului corespunzătoare efortului unitar maxim  $f_c$ , valorile vezi Tabelul 3.1 [2];

$\varepsilon_{cul}(\text{‰})$  - deformație specifică unitară a betonului la compresiune,  $\varepsilon_{cul}(\text{‰}) = 3,5$  pentru  $f_{ck} < 50 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{cul}(\text{‰}) = 2,8 + 27[(98 - f_{cm})/100]^4$  pentru  $f_{ck} \geq 50 \text{ MPa}$ , valorile vezi Tabelul 3.1 [2];

$E_{cm}$  - modulul de deformație secant al betonului, determinat prin unghiul dintre linia orizontală și linia care trece prin punctul  $0,4R_c$  plasat pe curbă, valorile vezi Tabelul 3.1 [2];

$f_{cm}$  - valoare medie a rezistenței la compresiune a betonului măsurat pe cilindri, valorile vezi Tabelul 3.1 [2];

Deasemenea în p.3.1.7 [1] se propun și alte relații simplificate efort-deformație pentru digrama parabolă-dreptunghi și diagrama biliniară pentru betonul comprimat.

Pentru *diagrama parabolă-dreptunghi* se propun relațiile:

$$\sigma_c = f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right], \text{ pentru } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2};$$

$$\sigma_c = f_{cd}, \text{ pentru } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2};$$
(3)

unde:

$f_{cd}$  - valoarea de calcul a rezistenței la compresiune a betonului, valorile vezi Tabelul 3.1 [2];

$n$  - exponent,  $n = 2,0$  pentru  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ,  $n = 1,4 + 23,4[(90 - f_{ck})/100]^4$  pentru  $f_{ck} \geq 50 \text{ MPa}$ , valorile vezi Tabelul 3.1 [2];

$\varepsilon_{c2}(\text{‰})$  - deformație atinsă la efortul maxim,  $\varepsilon_{c2}(\text{‰}) = 2,0$  pentru  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{c2}(\text{‰}) = 2,0 + 0,085(f_{ck} - 50)^{0,53}$  pentru  $f_{ck} \geq 50 \text{ MPa}$ , valorile vezi Tabelul 3.1 [2];

$\varepsilon_{cu2}(\text{‰})$  - deformația specifică unitară a betonului la compresiune,  $\varepsilon_{cu2}(\text{‰}) = 3,5$  pentru  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{cu2}(\text{‰}) = 2,6 + 35[(90 - f_{ck})/100]^4$  pentru  $f_{ck} \geq 50 \text{ MPa}$ , valorile vezi Tabelul 3.1 [2];

Pentru *diagrama biliniară* se propun relațiile:

$$\sigma_c = f_{cd} \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c3}} \right), \text{ pentru } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c3};$$

$$\sigma_c = f_{cd}, \text{ pentru } \varepsilon_{c3} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu3};$$
(4)

unde:

$\varepsilon_{c3}(\text{‰})$  - deformație atinsă la efortul maxim,  $\varepsilon_{c3}(\text{‰}) = 1,75$  pentru  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{c3}(\text{‰}) = 1,75 + 0,55[(f_{ck} - 50)/40]$ , pentru  $f_{ck} \geq 50 \text{ MPa}$ , valorile vezi Tabelul 3.1 [2];

$\varepsilon_{cu3}(\text{‰})$  - deformația specifică unitară a betonului la compresiune,  $\varepsilon_{cu3}(\text{‰}) = 3,5$  pentru  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{cu3}(\text{‰}) = 2,6 + 35[(90 - f_{ck})/100]^4$  pentru  $f_{ck} \geq 50 \text{ MPa}$ , valorile vezi Tabelul 3.1 [2];

Diferite publicații științifice precum și normative, inclusiv cel valabil pe teritoriul RM, vezi [3], propun pentru calculul eforturilor în elementele încovoiate diagrama dreptunghiulară a zonei comprimate. Problema constă în determinarea înălțimii utile a zonei comprimate. În Fig. 1 sunt reprezentate diferite abordări și rezultate pentru determinarea acestei înălțimi:

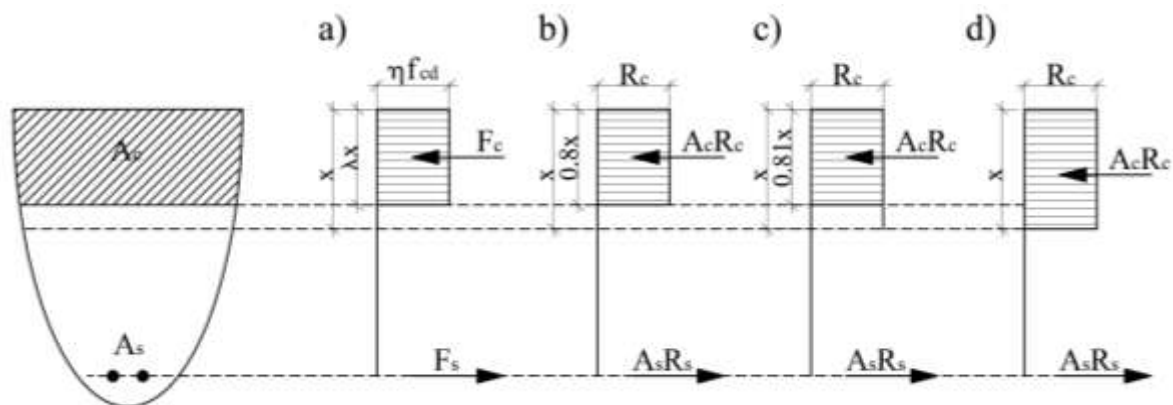


Fig.1 Înălțimea utilă a zonei comprimate pentru diagrama dreptunghiulară: a) conform Eurocode 2; b) conform NCM F02.02-2006; c) conform STAS 10 107/0-90 d) conform СНИП 2.03.01-84\*.

unde:

$\lambda = 0,8$  pentru  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ,  $\lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50)/400$  pentru  $50 \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$ ;

$\eta = 1,0$  pentru  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ,  $\eta = 1,0 - (f_{ck} - 50)/200$  pentru  $50 \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$ ;

## 2. Determinarea ariei și momentului static a zonei comprimate

Din Fig. 1 putem deduce că valoarea acestei înălțimi e aproximativ  $0,8x$ , unde  $x$  este înălțimea zonei comprimate. Scopul acestui articol și calculelor ce urmează este de a verifica această valoare. Pentru a ușura lucrul sa realizat un ciclu de calcul în software-ul MathCAD, iar calcule se vor face pentru clasa betonului C12/15 conform normelor europene [2], echivalentul lui C15 din normele valabile pe teritoriul RM [3].

În Fig.2 este reprezentată digrama  $\sigma - \varepsilon$  în baza relației propusă în [3], și cele 3 relații propuse în [2], unde:

$\sigma_{c.NCM}(\varepsilon_c)$  - reprezentarea schematică a relației efort-deformație, conform p.3.7.1 [3];

$\sigma_{c.EC\_2}(\varepsilon_c)$  - reprezentarea schematică a relației efort-deformație, conform p.3.1.5 [2];

$\sigma_{c.Parab\_drept}(\varepsilon_c)$  - diagrama parabolă-dreptunghi pentru beton comprimat, conform p.3.1.7 (1) [2];

$\sigma_{c.Biliniar}(\varepsilon_c)$  - diagrama biliniară pentru beton comprimat, conform p.3.1.7 (2) [2];

Pentru a exclude divergențele privind valoarea rezistenței betonului aceasta a fost egalată cu 1, deoarece valoarea acesteia nu influențează asupra calculelor următoare.

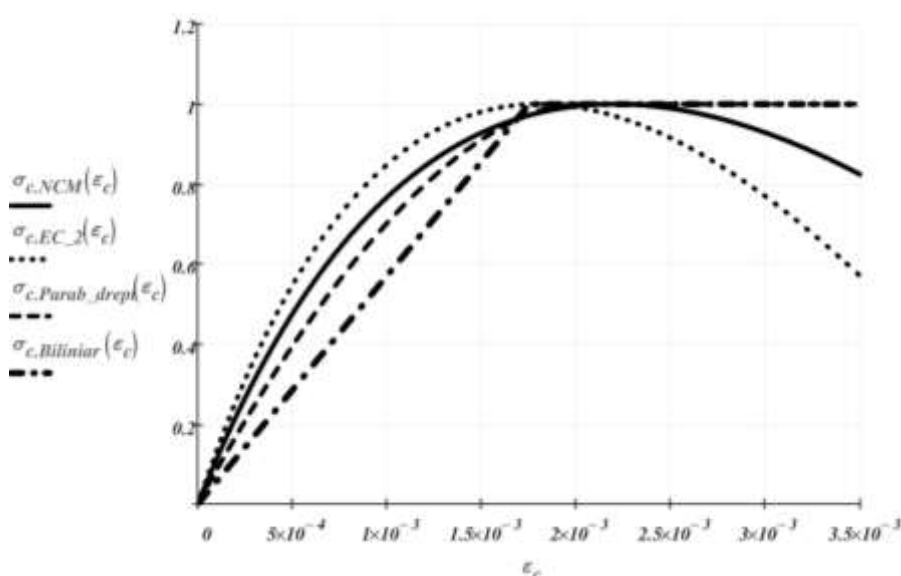


Fig.2 Diagrama  $\sigma - \varepsilon$ .

Pentru determinarea ariei zonei comprimate au fost integrate relațiile menționate mai sus, iar pentru a readuce diagramele propuse la una dreptunghiulară, cu lățimea de o unitate iar lungimea  $\gamma x$ , valorile ariilor obținute le împărțim la valoarea limită a deformațiilor obținând astfel valoarea coeficientului  $\gamma$ :

$$A_{c.NCM} = \int_0^{\varepsilon_{cul}} \frac{kn - n^2}{1 + (k - 2)n} d\varepsilon_c = \int_0^{0,0035} \frac{2,615 \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{0,0022}\right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{0,0022}\right)^2}{1 + (2,615 - 2) \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{0,0022}\right)} d\varepsilon_c = 0,002778$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{0,002778}{0,0035} = 0,794;$$

$$A_{c.EC\_2} = \int_0^{\varepsilon_{cul}} \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} d\varepsilon_c = \int_0^{0,0035} \frac{2,552 \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{0,0018}\right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{0,0018}\right)^2}{1 + (2,552 - 2) \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{0,0018}\right)} d\varepsilon_c = 0,002707,$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{0,002707}{0,0035} = 0,774;$$

$$A_{c,Parab\_drept} = \int_0^{\varepsilon_{c2}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] d\varepsilon_c + \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cu2}} 1 d\varepsilon_c = \int_0^{0,002} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{0,002} \right)^2 \right] d\varepsilon_c + \int_{0,002}^{0,0035} 1 d\varepsilon_c = 0,002773$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{0,002773}{0,0035} = 0,792;$$

$$A_{c,Biliniar} = \int_0^{\varepsilon_{c3}} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c3}} d\varepsilon_c + \int_{\varepsilon_{c3}}^{\varepsilon_{cu3}} 1 d\varepsilon_c = \int_0^{0,00175} \frac{\varepsilon_c}{0,00175} d\varepsilon_c + \int_{0,00175}^{0,0035} 1 d\varepsilon_c = 0,002625 \Rightarrow \gamma = \frac{0,002625}{0,0035} = 0,75;$$

Din calcule observăm că atât ariile cât și valoarea coeficientului  $\gamma$  practic sunt identice, și sunt foarte aproape de valoarea 0,8 propus de normativele la care sa făcut referință (cu excepția [5]).

Pentru a ne convinge de rezultatele obținute verificăm și valorile momentelor statice a zonei comprimate, față de axa neutră. Valorile brațelor pentru diagramele curbilinie, au fost determinate în același software MathCAD, din egalitatea ariilor de stânga și dreapta față de axa ce trece prin centrul de greutate:

$$S_{c,NCM} = A_{c,NCM} \cdot 0,5803 \cdot \varepsilon_{cu1} = 0,002778 \cdot 0,5803 = 1,61 \times 10^{-3};$$

$$S_{c,EC\_2} = A_{c,EC\_2} \cdot 0,5501 \cdot \varepsilon_{cu1} = 0,002707 \cdot 0,5601 = 1,52 \times 10^{-3};$$

$$S_{c,Parab\_drept} = A_{c,Parab\_drept} \cdot 0,6039 \cdot \varepsilon_{cu2} = 0,002773 \cdot 0,6039 = 1,67 \times 10^{-3};$$

$$S_{c,Biliniar} = A_{c,Biliniar} \cdot 0,611 \cdot \varepsilon_{cu3} = 0,002625 \cdot 0,611 = 1,6 \times 10^{-3};$$

$$S_{c,Dreptunghi} = 0,8 \cdot \varepsilon_{cu1} \cdot 0,6 \cdot \varepsilon_{cu1} = 0,8 \cdot 0,6 \cdot \varepsilon_{cu1} = 1,68 \times 10^{-3};$$

Analizând rezultatele obținute, observăm că valoarea momentului static pentru diagrama dreptunghiulară cu latura  $0,8x$  nu diferă substanțial, maximum 10%, față de celelalte diagrame. Deci coeficientul 0,8 propus de normativele menționate anterior, a fost demonstrat și justificat. Trecerea de la reprezentarea curbilinică a diagramei  $\sigma - \varepsilon$  la o formă mai simplă nu se limitează aici, unele țări încearcă implementarea diagramei triliniară, o idee bună, ce are drept la existență, dar care trebuie analizată.

În concluzie putem spune că odată cu introducerea metodei stărilor limită a fost separate noțiunile de acțiune și rezistență, introducând coeficienți cum ar fi cei de siguranță, de lucru etc., ce au scop de a ține sub control caracteristicile aleatorii a sarcinilor și neomogenității materialului numit beton, iar articolul prezentat împreună cu rezultatele obținute au avut scop de aprofundare a specificului ce ține cont de eforturile ce apar în elementele încovoiate și caracteristicile geometrice ale secțiunilor.

## Bibliografie

1. Agent, R.; Dumitrescu, D.; Postelnicu, T. – *Îndrumător pentru calculul și alcătuirea elementelor de beton armat*. – București: Editura Tehnică. 1992. – p. 54-89.
2. Eurocode 2. *Proiectarea structurilor de beton – Partea 1-1: Reguli generale și reguli pentru clădiri*. – București, ASRO, 2006. – 214 p.
3. NCM F.02.02.2006. *Calculul, proiectarea și alcătuirea elementelor de construcții din beton armat și beton precomprimat*/Agenția pentru dezvoltarea regională a R. M. – Chișinău: ACDT. 2006. – 207 p.
4. Байкоб, В. Н.; Сигалов, Э. Е. *Железобетонные конструкции. Общий курс*. - Москва: Стройиздат, 1984. – 120-124 с.
5. СНиП 2.03.01-84\*. *Бетонные и железобетонные конструкций*/Госстрой СССР – Москва: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. – 80 с.
6. Столяров, Я. В. *Ведение в теорию железобетона*. - Ленинград: Стройиздат Наркомстроя, 1941. – 211-251 с.