CONSTRUIREA FUNCȚIEI GREEN ÎN BANDĂ CU CONDIȚII DE LIMITĂ DE TIP NEUMANN

doctorand Ion CREȚU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *S-aconstruit funcția Green* $G(x,\xi)$*care verifică ecuațiaPoisson pentru banda* $V \equiv (-\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 \leq a_2)$, $x \equiv (x_1, x_2) \in V$, $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2) \in V$ *cu următoarele condiții de limită, pe latura* $x_2 = 0 \to \frac{\partial G(x_1,0;\xi)}{\partial x_2} = 0$, *iar pe latura*$x_2 = a_2 \to \frac{\partial G(x_1,a_2;\xi)}{\partial x_2} = 0$.

S-a construit graficul funcției Green pentru acest domeniu cu o exactitate de o constantă arbitrară "b", punctul de aplicare a impulsului unitar are coordonatele $\xi_1 = 0m, \xi_2 = 5m$.

Cuvinte cheie: *funcţia Green, condiții de limită Neumann,ecuaţia Poisson.*

1. Formularea generală aproblemei:

Să se construiascăfuncțiaGreenpentrubanda$V \equiv (-\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 \leq a_2)$,(Fig.1)care verifică ecuaţia Poisson:

$$\nabla^2 G(x,\xi) = -\delta(x-\xi); \tag{1}$$

cu condițiile de limită de tip Neumann:

$$\begin{aligned} &\Gamma_{20} \to \frac{\partial G(x_1,0;\xi)}{\partial x_2} = 0;\ x_2 = 0;\ -\infty < x_1 < +\infty; \\ &\Gamma_{21} \to \frac{\partial G(x_1,a_2;\xi)}{\partial x_2} = 0;\ x_2 = a_2;\ -\infty < x_1 < +\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Deoarece această problemă este pentru domenii nelimitate $(-\infty < x_1 < +\infty)$, funcția Green $G(x,\xi)$ trebuie să ia o valoare finită la infinit:

$G(x,\xi)|_{x_1=\pm\infty} < \infty(3)$

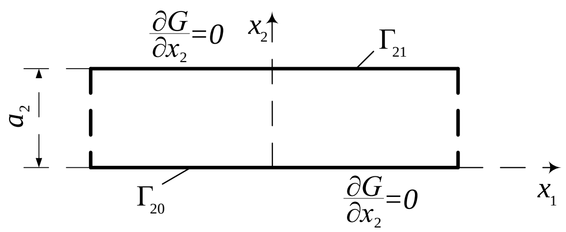


Fig.1 Schema unei benzi *V*

2. Rezolvare:

2.1. Construirea funcţieiGreen.

Conform surselor[1,2,3], construirea funcţiei Green înbanda *V*pentru ecuația Poisson de două dimensiuni se reduce la construirea funcției Green de odimensiune. Ulterior pentru construirea funcţiei Green pentru ecuaţii ordinare se folosește algoritmul prezentat [1,2].

Pentru rezolvarea problemei conform acestei metode trebuie de menţionat că se va utiliza separarea variabilelor.

Funcţia Green poate fi scrisă în serii trigonometrice Fourier infinite în următoarea formă:

$$G = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin v_1 x_2 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos v_1 x_2 , \tag{4}$$

unde coeficienţii a_0, a_m, b_m sunt funcţii de variabila x_1.

Conform condiţiilor de limită(2) şi (3):

$$v_1 = \frac{m\pi}{a_2}; m = 1,2,3 \ldots \Rightarrow a_m = 0. \tag{5}$$

Astfel seriile trigonometrice din relația (3)se redus la următoarea formă:

$$G = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos v_1 x_2. \tag{6}$$

Se substituie (6) în ecuaţia Poisson (1) şi se obține o ecuație diferențială:

$$a_0^{''} + \sum_{m=1}^{\infty} (b_m^{''} - v_1^2 b_m) \cos v_1 x_2 = -\delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2), \tag{7}$$

unde se are în vedere că pentru metoda separării variabilelor funcţia lui Dirac se scrie în forma următoare:

$$\delta(x - \xi) = \delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2).$$

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale (7) este necesar de înmulţit ambele părţi ale ecuaţiei la $\cos v_2 x_2$,

unde:

$$v_2 = \frac{s\pi}{a_2}; s = 1,2,3 \ldots \tag{8}$$

În continuare se calculează integralele pentru relațiile obținute în raport cu variabila x_2:

$$\int_0^{a_2} \cos v_1 x_2 \cos v_2 x_2 \, dx_2 = \begin{cases} 0; v_1 \neq v_2, s \neq m, \\ \dfrac{a_2}{2}; \; v_1 = v_2, s = m. \end{cases} \tag{9}$$

Dacă se ia în consideraţie următoarea proprietate a funcţiei Dirac:

$$\int_V f(x)\delta(x - \xi)\, dV(x) = f(\xi). \tag{10}$$

Atunci următoarea integrală poate fi scrisă în felul următor:

$$\int_0^{a_2} \delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2) \cos v_2 x_2 \, dx_2 = \delta(x_1 - \xi_1) \cos v_1 \xi_2, \tag{11}$$

Se înlocuiesc relațiile (9) și (11) în ecuația diferențială (7) și se obține:

$$b + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_2}{2}(b_m'' - \nu_1^2 b_m) = -\delta(x_1 - \xi_1)\cos\nu_1\xi_2, \tag{12}$$

unde *b* este o constantă.

Se rezolvă ecuaţia diferenţială (12) şi rezultatul se substituie în expresia (6), în final se obţinefuncţiaGreen $G(x,\xi)$ pentru problema de limită sub formă de serii infinitecu o exactitate de o constantă arbitrară *"b"*:

$$G(x,\xi) = b + \begin{cases} G_s(x,\xi) = \dfrac{1}{a_2}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{\nu_1}e^{\nu_1(x_1-\xi_1)}\cos\nu_1 x_2 \cos\nu_1\xi_2; \;\; x_1 \le \xi_1; \\ G_d(x,\xi) = \dfrac{1}{a_2}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{\nu_1}e^{-\nu_1(x_1-\xi_1)}\cos\nu_1 x_2 \cos\nu_1\xi_2; \;\; x_1 \ge \xi_1. \end{cases} \tag{13}$$

Relaţiile (13) reprezintă expresiile pentru funcţiaGreen din partea stîngă$x_1 \le \xi_1$ a punctului de aplicare a impulsului unitar şi respectiv din partea dreaptă $x_1 \ge \xi_1$a acestui punct. Aceste serii pot fi prezentate şi în funcţii elementare datorită următoarei egalităţi[4]:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p^m}{m}\cos(\alpha m) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2p\cos\alpha + p^2); \; p^2 < 1; \;\; 0 < \alpha < 2\pi; \tag{14}$$

Pentru a putea transforma seriile infinite(13) în funcţii elementare s-a utilizat şi următoarea formulă trigonometrică:

$$\cos\nu_1 x_2 \cos\nu_1\xi_2 = \frac{1}{2}[\cos\nu_1(x_2 - \xi_2) + \cos\nu_1(x_2 + \xi_2)]. \tag{15}$$

$$G(x,\xi) = b + \begin{cases} G_s(x,\xi) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{m\pi}e^{\frac{m\pi}{a_2}(x_1-\xi_1)} \times \\ \times \dfrac{1}{2}\left[\cos\dfrac{m\pi}{a_2}(x_2-\xi_2) + \cos\dfrac{m\pi}{a_2}(x_2+\xi_2)\right]; \; x_1 \le \xi_1; \\ G_d(x,\xi) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{m\pi}e^{\frac{-m\pi}{a_2}(x_1-\xi_1)} \times \\ \times \dfrac{1}{2}\left[\cos\dfrac{m\pi}{a_2}(x_2-\xi_2) + \cos\dfrac{m\pi}{a_2}(x_2+\xi_2)\right]; \; x_1 \ge \xi_1. \end{cases} \tag{16}$$

Expresia finală a funcţiei Green în funcţii elementare areforma:

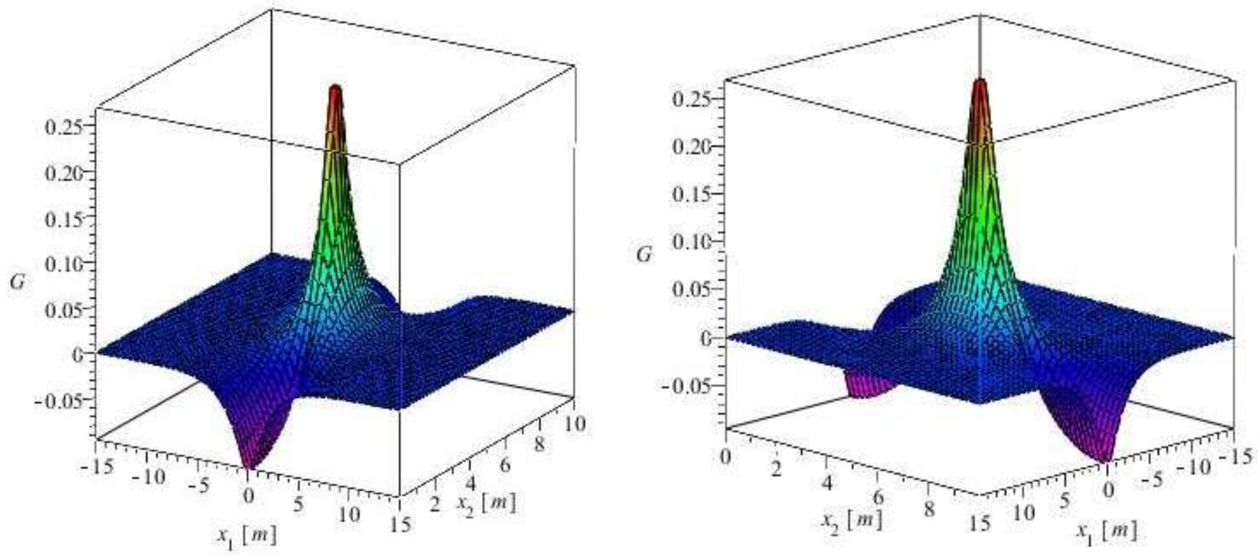
$$G(x,\xi) = b - \frac{1}{4\pi}\ln EE_2 + \begin{cases} 0 & ; x_1 \le \xi_1; \\ \dfrac{(x_1-\xi_1)}{a_2} & ; x_1 \ge \xi_1. \end{cases} \tag{17}$$

unde funcţiile E şi E_2se determină după următoarele expresii:

$$\begin{aligned} E &= 1 - 2e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1-\xi_1)}\cos\frac{\pi}{a_2}(x_2-\xi_2) + e^{\frac{2\pi}{a_2}(x_1-\xi_1)}; \\ E_2 &= 1 - 2e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1-\xi_1)}\cos\frac{\pi}{a_2}(x_2+\xi_2) + e^{\frac{2\pi}{a_2}(x_1-\xi_1)}. \end{aligned} \tag{18}$$

2.2. Construirea graficului funcției Green.

S-a folosit programa Maple 15 și s-a construit graficul funcției Green (17) cu o exactitate de o constantă arbitrară *b*=0, pentru bandă cu intervalul $-c \leq x_1 \leq +c, c = 15m, 0 \leq x_2 \leq a_2, a_2 = 10m$, dacă pe laturile $x_2 = 0$, și $x_2 = a_2$, $\frac{\partial G}{\partial x_2} = 0$. Punctul de aplicare a impulsului unitar are coordonatele $\xi_1 = 0m, \xi_2 = 5m$.



a) b)

Fig.2 Graficul funcției Green pentru bandă cu condiții de limită de tip Neumann

Graficele din Fig.2 reprezintă aceeaşi funcţie arătată din diferite părţi, dacă le analizămputem afirma:

- se respectă condiţiile de limită impuse iniţial, cum se vede din Fig.2. a),$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 0$pentru $x_2 = 0$, şi din Fig.2. b),$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 0$ pentru $x_2 = a_2$. Dacă variabila $x_1 \to \pm\infty$ atunci $G = 0$;
- dacă punctul de aplicare cu coordonatele (ξ_1,ξ_2) va coincide cu punctul de răspuns cu coordonatele (x_1, x_2), atunci funcţia G→∞ în comparaţie cu celelalte mărimi.Aceasta se datorează expresiei "$-\ln E$" din relația (17), și anume dacă $x$coincide cu ξ atunci "$-\ln E = +\infty$";
- pentru latura $x_2 = 0$, și pentru $x_2 = a_2$funcţia Green practic are valoarea $G = 0$ pentru intervalul$+5{,}0m \leq x_1 \leq -5{,}0m$;
- graficul este simetric în raport cu planul care trece prin punctul $\xi_1 = 0m$ și planul care trece respectiv prin punctul$\xi_2 = 5m$.

Concluzie:

Expresia funcției Green (16) poate fi folosită în conductibilitatea termică staționară pentru determinarea cîmpului interior de temperatură pentru banda *V* în cazul în care în interiorul benzii este aplicată o sursă de căldură sau pe diferite intervale ale laturilor benzii este aplicat un flux de căldură. De asemenea ea se va utiliza la calcularea deplasărilor şi tensiunilortermice pentru banda *V*.

Bibliografie:

1. Şeremet Victor. *Funcţii de influenţă în termoelasticitatea staţionară.* Chişinău, 2003, 308p.
2. Şeremet Victor. *Funcţii Green pentru ecuaţia Poisson.* Chişinău, 2003, 242p.
3. Şeremet Victor, Bonnet Guy. *Encyclopedia of domain Green's functions.* Chişinău, 2008, 220p.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* Москва.