APLICAȚII ALE CALCULULUI INTEGRAL LA DETERMINAREA FORȚEI DE ATRACȚIE A UNUI PUNCT MATERIAL DE CĂTRE O CURBĂ PLANĂ

Valeria CASTRAVEȚ

Departamentul Ingineria Software și Automatică, TI-215, FCIM,
Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova

Autorul corespondent: Castraveț Valeria, e-mail: valeria.castravet@isa.utm.md

Abstract: *În lucrarea dată se studiază aplicațiile calculului integral la determinarea forței de atracție a unui punct material de către o curbă materială plană. Materialul teoretic expus este ilustrat de exemple de calcul ale forței de atracție pentru următoarele curbe: cercul, o bară liniară infinită. Se deduc, aplicând legea lui Newton, formulele de calcul a forței de atracție a unui punct material de un sistem de puncte sau de o curbă materială plană.*

Cuvinte-cheie: *curbă plană , densitate, integrală curbilinie, legea lui Newton, masa, sistem de puncte materiale.*

Introducere

Atracția unui punct material dat de catre alt punct sau de către un sistem de puncte materiale poate fi determinată aplicând legea corespunzătoare a lui Isaac Newton, adunând vectorial forțele de atracție a punctului material dat de către celelate puncte. In cazul, când punctele sunt repartizate în mod continuu pe o curbă de densitatea dată calculul forței de atracție se efectuază cu ajutorul integralei curbilinii de speța 1 .

1. Deducerea formulelor de calcul (aplicând legea lui Newton) a atracției unui punct material de către un sistem de puncta date

Conform Legii lui Newton, având un punct material M_1 cu masa egală cu m_1 unități, acesta va fi atras de punctul M de masă m ($m > m_1$), cu o forță egală cu $k\frac{mm_1}{r^2}$, îndreptată de la M_1 spre M. Aici k este un coefficient de proporționalitate ce depinde de unitățile de măsură alese, iar r este distanța dintre aceste puncte.

Fie dat acum un sistem de puncte materiale notate M_1, $M_2,\ldots,M_n$ cu masele respectiv egale cu $m_1, m_2,\ldots,m_n$. și aceste puncte au poziții fixe, bine determinate. În figura 1 este reprezentat punctul M , care este atras de sistemul de puncte materiale M_1 , $M_2,\ldots, M_n$. Dacă vom suma geometric forțele de atracție a punctului M de către aceste puncte, vom primi forța rezultantă.

Notăm prin $\vec{r_j} = \overrightarrow{MM_j}$, vectorii ce pornesc din punctul M de masa m spre punctele M_j de masa m_j, prin r_j – lungimile acestor vectori, iar prin α_j – unghiurile formate de acești vectori cu axa OX , j = 1,2,…,n (figura 1).

Fie Fx și Fy - proiecțiile forței rezultante pe axele de coordinate. Atunci obținem, că

$$Fx = \sum_{j=1}^{n} \frac{mm_j}{r_j^2} \cos\alpha_j \,, \quad Fy = \sum_{j=1}^{n} \frac{mm_j}{r_j^2} \sin\alpha_j \qquad (1).$$

Cu ajutorul formulelor (1) se calculează forța de atracție a unui punct material de către un sistem de puncte date.

Dacă punctele sunt repartizate în mod continuu pe o curbă de densitatea data, atunci calculul forței de atracție a unui punct material dat de către aceste puncte se efectuază cu ajutorul integralei curbilinii de speța 1.

Având o curbă L, densitatea căreia este ρ(x,y), reușim să determinăm forța de atracție a unui punct material de masa m de această curbă, dacă aplicăm același procedeu ca și la definiția integralei curbilinii.

Pentru aceasta împărțim curba L în porțiuni mici, alegem în mod arbitrar pe fiecare porțiune câte un punct M_j considerând, că masa acestei porțiuni este egală cu valoarea funcției ρ(x,y) în acest punct.

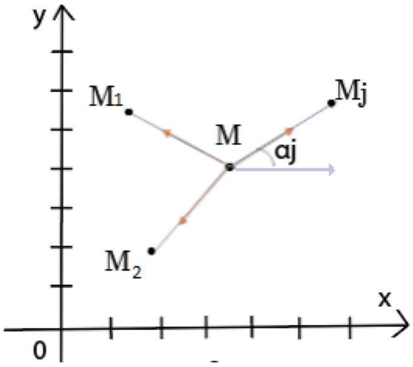

Figura 1.

Drept urmare, aplicând formulele (1), obținem, că :

$$Fx \approx \sum_j \frac{m\rho\sigma_j}{r_j^2}\cos\alpha_j \qquad Fy \approx \sum_j \frac{m\rho\ \ j}{r_j^2}\sin\alpha_j,$$

unde σ_j este lungimea porțiunii corespunzătoare j.

Trecând la limită în aceste sume integrale cu toți σ_j → 0, obținem formulele de calcul ale componentelor forței de atracție exprimate prin integrala curbilinie de speța 1:

$$Fx = m\int_L \frac{\rho\cos\alpha}{r^2}ds \qquad Fy = m\int_L \frac{\rho\sin\alpha}{r^2}ds \qquad (2)$$

Notă. Dacă arcul este dat în mod parametric: $x = x(t)$, $y = y(t)$, atunci

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt$$

2. Aplicații. Exemple

Fie dat un arc de cerc omogen situat în primul cadran, având densitatea constantă egală cu ρ. Trebuie să aflăm atracția produsă de acest arc, asupra unității de masă care este situată în centrul cercului.

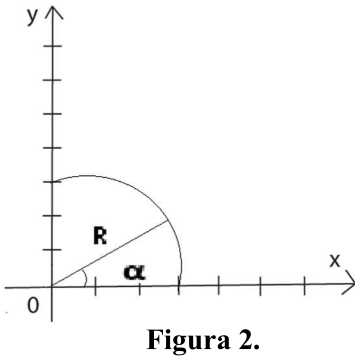

Figura 2.

Pentru aceasta stabilim originea coordonatelor în centrul cercului. Ecuațiile parametrice ale acestui arc de cerc sunt: $x = R\cos\alpha$, $y = R\sin\alpha$, $\alpha \in [0; \pi/2]$.

Se deduce ușor, că $ds = Rd\alpha$ și că distanța $r = R$. Astfel, din formulele (2) obținem:

$$Fy = \frac{1}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\rho}{R}(-\cos(\alpha))|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho}{R}$$

$$Fx = \frac{1}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\rho}{R}.$$

Concluzie: Observăm, că proiecțiile forței Fx și Fy pe axele de coordinate, în acest caz, sunt egale. Astfel, dacă mărim raza, atunci forța de atracție se micșorează, iar dacă mărim densitatea, forța se mărește.

Fie acum, ca arcul de cerc din exemplul 2.1 are în fiecare punct densitatea egală cu suma coordonatelor punctului dat, adică $\rho = x + y$. Din exemplul 2.1 avem că ds = Rdα și că distanța $r = R$. Aplicând formulele (2), obținem: $Fy = \frac{1}{R}\int_0^{\pi/2} R(\cos\alpha + \sin\alpha)\sin\alpha\, d\alpha = \int_0^{\pi/2}(\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha)d\alpha = \int_0^{\pi/2}(\cos\alpha\sin\alpha + \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha))d\alpha = \frac{1}{2}\left(\sin^2\alpha + \alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(1+\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi+2}{4}$.

$$Fx = \frac{1}{R}\int_0^{\pi/2} R(\cos\alpha + \sin\alpha)\cos\alpha\, d\alpha = \int_0^{\pi/2}(\cos\alpha\sin\alpha + \cos^2\alpha)d\alpha$$
$$= \int_0^{\pi/2}(\cos\alpha\sin\alpha + \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha))d\alpha = \frac{\pi+2}{4}$$

Fie, că linia data reprezintă o bară liniară infinită omogenă cu densitatea constantă egală cu ρ. Se cere să determinăm forța de atracție produsă de această dreaptă asupra unui punct de masă unitară, distanța de la acest punct până la dreaptă fiind egală cu h.

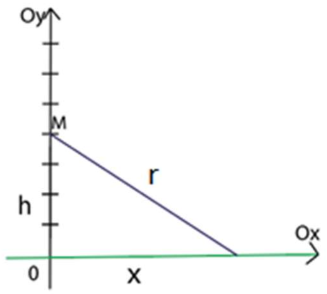

Figura 3.

Considerăm, că dreapta data coincide cu axa OX, iar punctul dat e situat pe axa OY. În acest caz, este nevoie să privim atracția dată ca fiind limita atracției produse de un segment al axei reale [-a, a], $a \to \infty$.

În acest caz $ds = dx$ și obținem următoarea integrală improprie:

$$Fy = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho\sin\alpha}{r^2}ds; \left[r = \sqrt{x^2+h^2}, \sin\alpha = \frac{h}{r}(fig.3); ds = dx\right] \Rightarrow$$
$$Fy = -\rho\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h}{r^3}d\alpha = -\rho h\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+h^2)^{3/2}}dx$$

Calculăm aparte: $\int\frac{1}{(x^2+h^2)^{3/2}}dx = |x = h\cdot tgt|, dx = \frac{h}{\cos^2 t}$,

$x^2 + h^2 = \frac{h^2}{\cos t^2}$

Atunci $\int\frac{1}{(x^2+h^2)^{3/2}}dx = \frac{1}{h^2}\int\cos t\, dt = \frac{1}{h^2}\sin t\,; \sin^2 t = \frac{1}{1+ctg^2 t} = \frac{tg^2 t}{tg^2 t+1} = \frac{x^2/h^2}{1+x^2/h^2} = \frac{x^2}{h^2+x^2}$.

Astfel $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+h^2)^{3/2}}dx = \frac{1}{h^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{h}$; $Fy = -\frac{2\rho}{h}$

$$Fx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho\cos\alpha}{r^2}ds = \rho\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{r^3}d\alpha = \rho\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}dx = 0,$$

Deoarece $\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}dx = -\int_0^{+\infty}\frac{x}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

Concluzie: Proiecțiile forței sunt $Fx = 0$, $Fy = -\frac{2\rho}{h}$. Observăm că , cu cât densitatea ρ este mai mare, cu atât este mai mare forța de atracție și cu cât este mai mare distanța h, cu atât este mai mică forța de atracție.

Mulțumiri

Aduc sincere mulțumiri și recunoștință coordonatorului Iurie Baltag, conf. univ., dr. pentru tema propusă și ajutorul acordat în realizarea ei. iurie.baltag@mate.utm.md

Referințe

1. Fihtenholț G. *Curs de calcul diferențial și integral,* Editura tehnică, București, 1965.
2. https://www.ucv.ro/pdf/departamente_academice/dma/suporturi_curs/Tema8_A.pdf
3. Legea atracției universale | Math Wiki | Fandom