

## UN INDICE QUASI INVARIANT DE APRECIERE A DISPROPORȚIONALITĂȚII ÎN SISTEME RP

*Prof. univ. dr. Ion BOLUN, ASEM*

*Pentru sistemele de votare cu reprezentare proporțională, este definită noțiunea de indice invariant. În scopul folosirii în cercetări comparative a unor asemenea sisteme, suplimentar la indicii Rae și Grofman, care sunt invariante față de numărul de partide, este propus un nou indice. Ultimul este quasi-invariant față de numărul de partide și, de asemenea, față de numărul de mandate. Este determinat domeniul de definiție al valorilor acestui indice pentru soluțiile optime.*

***Cuvinte-cheie:** decizie, votare, reprezentare proporțională, disproportionalitate, indice-quasi invariant.*

### 1. Introducere

La luarea deciziilor colective prin votare cu reprezentare proporțională (RP), se cere minimizarea disproportiei reprezentării voinței decidenților în decizie – disproportie cauzată de caracterul în întregi al numărului de decidenți și, de asemenea, al celui de opțiuni alternative. Pentru estimarea acestei disproportii, au fost propuși diverși indici, o parte din care sunt descriși în [1-4]. Cele mai cunoscute practici privind folosirea sistemelor de votare sunt, probabil, cele ce țin de scrutinele electorale. De aceea, în continuare, aspectele abordate privind indicii de disproportionalitate se vor cerceta, fără a diminua din universalitate, prin prisma scrutinelor electorale cu reprezentare proporțională de liste de partid (coalitii, blocuri) – RPL.

În cercetările comparative ale diverselor cazuri concrete de luare a deciziilor, este importantă invarianța față de anumiți factori, a indicelui de disproportionalitate aplicat. Doi dintre cei 12 indici de disproportionalitate, descriși în [4], și anume cei Rae [2] și Grofman [3], sunt mențiți să asigure invarianța față de numărul de partide. În lucrare este întreprinsă o încercare de extindere a invarianței indicelui de disproportionalitate folosit în aceste scopuri.

### 2. Considerații preliminare

Factorii de influență ai indicelui de disproportionalitate depind de esența sistemului de votare RPL. În cele ce urmează, se cercetează doar sistemele RPL, în care toți alegătorii sunt egali în drepturi, adică toate voturile au aceeași pondere; rezultatele obținute la o asemenea supoziție pot fi, de regulă, extinse relativ ușor și pentru scrutine cu voturi ponderate.

Fie:  $M$  este numărul total de mandate în organul electiv;  $n$  – numărul de partide care au atins sau depășit pragul electoral;  $V$  – numărul total de voturi exprimate

## QUASI INVARIANT INDEX FOR THE ESTIMATION OF DISPROPORTIONALITY IN PR SYSTEMS

*Univ. Prof. Univ. Dr. Hab Ion BOLUN, AESM*

*Notion of invariant index for voting systems with proportional representation is defined. For use in comparative analysis of such systems, additionally to Rae and Grofman indices, which are invariant to the number of parties, a new one is proposed. The last one is quasi invariant to the number of parties and to the number of seats, too. The definition domain of this index for the optimal solutions is determined.*

***Key-words:** decision, voting, proportional representation, disproportionality, quasi invariant index.*

### 1. Introduction

When taking collective decisions by voting with proportional representation (PR), the minimization of disproportion of deciders' will representation in the decision – disproportion caused by the character in integers of the number of deciders and, also, of the alternative options, is needed. For the estimation of this disproportion, diverse indices were proposed, a part of which are described in [1-4]. The most known practices with refer to the use of voting systems are, probably, the ones related to elections. Therefore, further, the addressed aspects referring the indices of disproportionality will be investigated (not harming the universality) through the party-lists PR elections – LPR.

In comparative analysis of various cases of taking decisions, the invariance, to certain factors, of applied index of disproportionality is important. Two of the 12 indices of disproportionality, described in [4], namely the Rae [2] and Grofman ones[3], are designed to ensure invariance to the number of parties. In this paper an attempt to extend the invariance of the index of disproportionality, used for such purposes, is undertaken.

### 2. Preliminary considerations

Factors that influence the index of disproportionality depend on core LPR voting system. The following examines only LPR systems, in which all voters have equal rights, that all votes have equal weight; results, obtained in such assumptions, can be, as a rule, relatively easy extended for elections with weighted votes. Let:  $M$  – number of seats in the elective body;  $n$  – number of parties that have reached or exceeded the representation threshold;  $V$  – total

valabil pentru cele  $n$  partide;  $V_i$  – numărul de voturi exprimate valabil în favoarea partidului  $i, i = \overline{1, n}$ ;  $x_i$  – numărul de mandate ce se alocă partidului  $i$ .

Dacă în calitate de criteriu de minimizare a disproporționalității se folosește indicele  $I$ , atunci problema de optimizare a distribuirii mandatelor între partide poate fi formulată în modul ce urmează [5]. Sunt cunoscute mărimile (numere naturale):  $M; n; V_i, i = \overline{1, n}$ . Se cere determinarea mărimilor  $x_i (i = \overline{1, n})$  – numere întregi, care ar asigura valoarea extremală a indicelui  $I$ , adică

$$I = f(M; n; V_i, x_i, i = \overline{1, n}) \rightarrow \text{extremum / extremum} \quad (1)$$

la respectarea restricțiilor:

$$\sum_{i=1}^n x_i = M \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n V_i = V \quad (3)$$

$$x_i \geq 1, i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

În (1), prin „extremum” se subînțelege valoarea minimală sau maximală a indicelui  $I$ , în funcție de esența acestuia. Dacă  $I$  semnifică disproporționalitatea distribuirii celor  $M$  mandate între  $n$  partide, atunci se are în vedere minimizarea valorii lui  $I$ , iar dacă  $I$  caracterizează proporționalitatea distribuirii mandatelor între partide, atunci se are în vedere maximizarea valorii acestuia. Conform [1, 5] proporțională se consideră distribuția  $x_i (i = \overline{1, n})$  care asigură egalitățile

$$m_i = v_i, i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

unde  $v_i = 100 \cdot V_i / V$  este procentul voturilor acumulate de partidul  $i$ , iar  $m_i = 100 \cdot x_i / M$  – procentul mandatelor distribuite partidului  $i$ .

Din problema (1)-(4) rezultă că în calitate de date inițiale pentru categoria cercetată de scrutine servesc mărimile:  $M; n; V_i, i = \overline{1, n}$ . Din (5) se poate observa că nu este oportună invarianța indicelui căutat față de mărimile  $V_i, i = \overline{1, n}$  sau, mai exact, al celor  $v_i = 100 \cdot V_i / V, i = \overline{1, n}$ , care și impune diferențierea partidelor la determinarea distribuirii  $x_i (i = \overline{1, n})$ . Astfel, invarianța indicelui respectiv ar trebui asigurată față de mărimile  $M$  și  $n$ . La valori relativ mici ale raportului  $V/M$ , un aport semnificativ ar putea avea și mărimea  $V$ . Deci un indice, pentru cercetări comparative a diverselor cazuri de luare a deciziilor colective prin votare cu reprezentare proporțională, se va considera invariant față de datele inițiale, dacă valoarea acestuia nu va depinde de mărimile  $M, n$  și  $V$  la aceleași valori ale mărimilor  $v_i, i = \overline{1, n}$ .

valid votes cast for the  $n$  parties;  $V_i$  – total valid votes cast for party  $i, i = \overline{1, n}$ ;  $x_i$  – number of seats to be allocated to party  $i$ .

If index  $I$  is used as a quality criterion for the minimization of disproportionality, then the problem of optimization of seats distribution among parties can be formulated as follow [5]. Let are known the parameters (natural numbers):  $M; n; V; V_i, i = \overline{1, n}$ . It is required to determ

in compliance with restrictions:

In (1) by „extremum” is understood the minimum or maximum value of index  $I$ , depending of its essence. If  $I$  signify the disproportionality of distribution of the  $M$  seats among  $n$  parties, then it is envisaged to minimize the value of  $I$ , and if  $I$  characterizes the proportionality of seats distribution among parties, then it means the maximization of its value. Conform to [1, 5], proportional is considered the distribution which assure the equalities

where  $v_i = 100 \cdot V_i / V$  is the percentage of votes gained by party  $i$ , and  $m_i = 100 \cdot x_i / M$  – the percentage of seats distributed to party  $i$ .

From the problem (1) - (4), results that as initial data for the investigated category of elections serve parameters:  $M; n; V_i, i = \overline{1, n}$ . From (5) we can see that it is not opportune the invariance of the sought index to parameters  $V_i, i = \overline{1, n}$  or, more precisely, to measures  $v_i = 100 \cdot V_i / V, i = \overline{1, n}$  ones, which enforces the differentiation of parties when determining the distribution  $x_i (i = \overline{1, n})$ . Thus, the invariance of the index in question should be provided to measures  $M$  and  $n$ . At relatively low values of ratio  $V/M$ , a significant contribution could have the size of  $V$ . So, an index, for the comparative analyses of various cases of taking collective decisions by voting with proportional representation, will be considered invariant to initial data, if its value will not depend on the parameters  $M, n$  and  $V$  at the same values of quantities  $v_i, i = \overline{1, n}$ .

**3. Indici parțial invarianți**

După cum s-a menționat în p. 1, la indici bine cunoscuți de disproportionalitate, parțial invarianți, se referă Rae și Grofman. Indicele Rae, notat aici  $I_{Rae}$ , este propus, în 1967 [2], și se determină ca devierea absolută medie a procentajului voturilor de la cel al mandatelor unui partid

$$I_{Rae} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |v_i - m_i|. \tag{6}$$

Acesta determină disproportionalitatea distribuirii mandatelor ce revine, în medie, unui partid [1], asigurând, într-o oarecare măsură, invarianța față de numărul de partide. Totodată, folosirea lui la aprecierea disproportionalității totale pe scrutin conduce la supraestimarea proporționalității în sistemele cu multe partide [1].

Indicele Grofman [3], notat aici  $I_{Gr}$ , propus în 1986, se deosebește de indicele Rae doar prin înlocuirea lui  $n$  cu „numărul efectiv”  $N$  de partide

$$I_{Gr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n |v_i - m_i| \tag{7}$$

unde  $N = 10^4 / \sum_{i=1}^n v_i^2$  sau  $N = 10^4 / \sum_{i=1}^n m_i^2$ . Se

poate observa că numărul efectiv de partide este cu atât mai mare, cu cât mărimile  $v_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) au valori mai apropiate. La  $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 100/n$ , acesta este egal cu  $n$ , iar la  $v_1 \approx 100\%$ ,  $v_2 \approx v_3 \approx \dots \approx v_n \approx 0\%$  are loc  $N \approx 1$ , partidele care au acumulat mai puține voturi, contribuind mai puțin la valoarea  $N$ . Astfel, indicele  $I_{Gr}$  ponderează partidele în funcție de mărimea  $v_i$ .

**4. Un indice causiinvariant**

Pentru determinarea unui indice invariant, în sensul definit în p. 3, este necesară elucidarea noțiunii de disproportionalitate a distribuirii  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  la datele inițiale:  $M; n; V_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . La acest subiect, se va folosi abordarea din [5], în care este argumentată oportunitatea folosirii în calitate de indice de disproportionalitate a Abaterii relative medii  $I_d$ , care se determină ca

$$I_d = \frac{\Delta d}{d} 100 = \sum_{i=1}^n |v_i - m_i|, \text{ \% mandate / \% seats,} \tag{8}$$

unde  $d = M/V$  este valoarea unui vot, iar  $\Delta d$  – abaterea absolută medie

$$\Delta d = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \Delta d_i V_i = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n V_i |d_i - d| = \frac{d}{100} \sum_{i=1}^n |v_i - m_i|. \tag{9}$$

În (9),  $d_i = x_i/V_i$  este valoarea reprezentării, iar  $\Delta d_i = |d_i - d|$  – abaterea (eroarea) absolută a reprezentării în cele  $x_i$  mandate a valorii  $d$  a drepturilor fiecărui alegător ce a votat pentru partidul  $i$ . Argumentarea folosirii unui indice invariant  $I_{inv}$  anume se va face în baza generalizării a trei abordări:

**3. Partial invariant indices**

As mentioned in p. 1, to well-known indices of disproportionality refer the Rae and Grofman ones. The Rae index, here noted  $I_{Rae}$ , is proposed in 1967 [2] and is determined as the mean absolute deviation of the percentage of votes from the percentage of seats by one party

This index determines the disproportionality of seats distribution that lies on average to a party [1], ensuring, to some extent, the invariance to the number of parties. However, its use for the estimation of the total disproportionality of an election leads to the overestimation of proportionality in systems with many parties [1].

Grofman index [6], noted here  $I_{Gr}$ , is proposed in 1986, differs from the Rae one only by the replacement of  $n$  by the „effective number”  $N$  of parties

where  $N = 10^4 / \sum_{i=1}^n v_i^2$  or  $N = 10^4 / \sum_{i=1}^n m_i^2$ . We

can see that the effective number of parties is greater, if measures  $v_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) have closer values. At  $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 100/n$ , it is equal to  $n$ , and at  $v_1 \approx 100\%$ ,  $v_2 \approx v_3 \approx \dots \approx v_n \approx 0\%$  takes place  $N \approx 1$ , parties, who have earned fewer votes, less contributing to the value of  $N$ . Thus, index  $I_{Gr}$  weights parties depending on the value of  $v_i$ .

**4. A quasi invariant index**

To identify an invariant index, in sense defined in p. 3, it is necessary to elucidate the notion of distribution  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  disproportionality at initial data:  $M; n; V_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . On this topic, it will be used the approach from [5], in which it is argued the opportunity to use as disproportionality index the Mean relative deviation  $I_d$ , which is determining as

where  $d = M/V$  is the value of one vote, and  $\Delta d$  – the mean absolute deviation

In (9),  $d_i = x_i/V_i$  is the value of the representation, and  $\Delta d_i = |d_i - d|$  is the absolute deviation (error) of the representation in the  $x_i$  seats of the value  $d$  of rights of each elector that voted for party  $i$ . The reasoning of using invariant index  $I_{inv}$  will be done by generalizing three approaches:

- |   |  |
|---|--|
| <p>1) în baza esenței indicelui <math>I_d</math>;</p> <p>2) în baza expresiei pentru valoarea <math>I_d^*</math> a criteriului de optimizare <math>I</math> pentru soluția optimă a problemei (1)-(4) la folosirea în calitate de criteriu <math>I</math> a indicelui <math>I_d</math>;</p> <p>3) în baza expresiei pentru limita de sus <math>\widehat{I}_d^*</math> a domeniului de definiție a valorilor <math>I_d^*</math>.</p> | <p>4) basing on the essence of index <math>I_d</math>;</p> <p>5) basing on the expression for the value <math>I_d^*</math> of optimization criterion <math>I</math> for the problem (1) – (4) optimal solution, when using index <math>I_d</math> as criterion <math>I</math>;</p> <p>6) basing on expression for the upper limit <math>\widehat{I}_d^*</math> of the definition domain of <math>I_d^*</math>.</p> |
|---|--|

**Abordarea 1.** Indicele  $I_d$  se măsoară în % mandate, iar cel Rae – în % mandate/partid. Poate să prezinte interes și indicele de disproportionalitate  $I_{inv1}$ , care s-ar măsura în mandate/partid. În acest caz, s-ar exclude, într-o oarecare măsură, unul din neajunsurile principale ale indicelui Rae – supraestimarea proporționalității în sistemele cu multe partide. Astfel, ținând cont de (6) și (8), avem

$$I_{inv1} = I_d \frac{M}{100n} = I_{Rae} \frac{M}{100} = \frac{M}{100n} \sum_{i=1}^n |v_i - m_i|, \text{ mandate/partid // seats/party.} \quad (10)$$

**Abordarea 2.** Folosind în problema (1)-(4), în calitate de criteriu de optimizare  $I$ , indicele  $I_d$ , în [5] este obținută următoarea expresie pentru valoarea optimă  $I_d^*$  a  $I_d$ :

$$I_d^* = 200 \left( \frac{\Delta M}{M} - \frac{1}{V} \sum_{j=1}^{\Delta M} R_j \right) = \frac{200}{M} \left( \Delta M - \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{\Delta M} R_j \right) = \frac{200 \Delta M}{M} \left( 1 - \frac{\overline{R}_{1, \Delta M}}{Q} \right), \quad (11)$$

în care  $R_j, j = \overline{1, \Delta M}$  sunt cele mai mari  $\Delta M$  resturi din cele  $\Delta V_i = V_i - a_i Q, i = \overline{1, n}, Q = 1/d = V/M$ , iar  $a_j = \lceil dV_j \rceil$  mandate, unde  $\lceil z \rceil$  semnifică partea întregilor numărului  $z$ ; de asemenea,  $\overline{R}_{1, \Delta M}$  este media aritmetică a celor  $\Delta M$  resturi  $R_j, j = \overline{1, \Delta M}$ .

Din (11) se poate observa că  $I_d^*$  depinde de rapoartele  $\Delta M/M$  și  $(R_1 + R_2 + \dots + R_{\Delta M})/V$  (vezi prima expresie din (11)) sau, prin alte mărimi, – de rapoartele  $\Delta M/M$  și  $\overline{R}_{1, \Delta M}/Q$  (vezi ultima expresie din (11)). Conform definiției, are loc relația  $\overline{R}_{1, \Delta M} \in (0; Q)$ , deci  $\overline{R}_{1, \Delta M}/Q < 1$  și, respectiv,  $(1 - \overline{R}_{1, \Delta M}/Q) \in (0; 1)$ . Totodată, deoarece  $1 \leq \Delta M \leq n - 1$  (cazul  $\Delta M = 0$  corespunde distribuției proporționale), valoarea  $\Delta M$  depinde și de numărul de partide. Se poate considera, cu o oarecare aproximație că, în medie, valoarea  $\Delta M$  este direct proporțională cu valoarea  $n$ . Mai mult ca atât, dacă repartiția  $\Delta M$  în intervalul  $[1; n - 1]$  este simetrică față de mijlocul  $(1 + n - 1)/2 = n/2$  al acestui interval, atunci valoarea medie a  $\Delta M$  este egală cu  $n/2$ . Astfel, se poate considera, cu o oarecare aproximație, că, în medie, valoarea  $I_d^*$  este direct proporțională cu valoarea  $n$  și invers proporțională cu valoarea  $M$ . Deci, în calitate

**Approach 1.** Index  $I_d$  is measured in % seats, and the Rae one – in % seats/party. It can be of interest the index of disproportionality  $I_{inv1}$  that would be measured in seats/party. In this case, it would be excluded, to some extent, one of the main shortcomings of the Rae index – overestimation of proportionality in systems with many parties. Thus, taking into account relations (6) and (8), we have

**Approach 2.** Using in problem (1) - (4), as optimization criterion  $I$ , index  $I_d$ , in [5] is obtained the following expression for the optimal value  $I_d^*$  of  $I_d$ :

in which  $R_j, j = \overline{1, \Delta M}$  are the largest  $\Delta M$  remainders from the  $\Delta V_i = V_i - a_i Q, i = \overline{1, n}$  ones,  $Q = 1/d = V/M$ , and  $a_j = \lceil dV_j \rceil$  seats, where  $\lceil z \rceil$  signify the integer part of  $z$ ; also,  $\overline{R}_{1, \Delta M}$  is the arithmetic mean of the  $\Delta M$  remainders  $R_j, j = \overline{1, \Delta M}$ .

From (11) one can see that  $I_d^*$  depends on ratios  $\Delta M/M$  and  $(R_1 + R_2 + \dots + R_{\Delta M})/V$  (see the first expression from (11)) or, through other measures, – on ratios  $\Delta M/M$  and  $\overline{R}_{1, \Delta M}/Q$  (see the last expression from (11)). According to the definition, takes place the relation  $\overline{R}_{1, \Delta M} \in (0; Q)$ , so  $0 < \overline{R}_{1, \Delta M}/Q < 1$  and, respectively,  $(1 - \overline{R}_{1, \Delta M}/Q) \in (0; 1)$ . At the same time, because  $1 \leq \Delta M \leq n - 1$  (case  $\Delta M = 0$  corresponds to the proportional distribution), the value  $\Delta M$  depends on the number of parties, too. We can consider, with some approximation that, on average, the  $\Delta M$  value is directly proportional to the  $n$  value. Moreover, if  $\Delta M$  distribution in the interval  $[1; n - 1]$  is symmetrical to the middle  $(1 + n - 1)/2 = n/2$  of this interval, than the mean value of  $\Delta M$  is equal to  $n/2$ . Thus, it can be considered, with certain approximation that, on average, the measure  $I_d^*$  is directly proportional to the value of  $n$  and inversely proportional to the value of  $M$ . So, as an

de indice quasi-invariant față de  $M$  și  $n$  poate fi folosit indicele  $I_{inv2}$ , care se determină ca produsul dintre  $I_d$  și raportul  $M/(100n)$ ; împărțirea la 100 este folosită pentru ca unitatea de măsură să fie în mandate/partid și nu în procente, adică

$$I_{inv2} = I_d \frac{M}{100n} = \frac{M}{100n} \sum_{i=1}^n |v_i - m_i|, \text{ mandate/partid // seats/party.} \quad (12)$$

**Abordarea 3.** Domeniul de definiție al  $I_d^*$  este determinat, conform [5], de intervalul  $[\tilde{I}_d^*; \hat{I}_d^*]$ , unde limita de jos  $\tilde{I}_d^* = 0$  se obține la distribuirea proporțională ( $\Delta M = 0$ ), iar cea de sus  $\hat{I}_d^*$  se determină ca

$$\hat{I}_d^* = \max I_d^* = \frac{50n}{M} \begin{cases} 1, & \text{la } n \text{ par} \\ 1-1/n^2, & \text{la } n \text{ impar} \end{cases}, \% \text{ mandate.} \quad (13)$$

Conform (13), valoarea  $\hat{I}_d^*$  este direct proporțională, la  $n$  par, și aproape direct proporțională, la  $n$  impar, cu raportul  $n/M$ . Considerând că aceeași proporționalitate este caracteristică și pentru indicele  $I_d^*$ , un indice, quasi invariant față de numărul  $M$  de mandate și, de asemenea, față de numărul  $n$  de partide, ar putea fi, în mare măsură, indicele  $I_{inv3}$ , care, ținând cont de expresia (12), se determină ca (este propusă împărțirea la 100 pentru ca unitatea de măsură să fie nu în procente ci în mandate/partid):

$$I_{inv3} = \frac{M}{100n} \sum_{i=1}^n |v_i - m_i| \left/ \begin{cases} 1, & \text{la } n \text{ par} \\ 1-1/n^2, & \text{la } n \text{ impar} \end{cases} \right. \approx \frac{M}{100n} \sum_{i=1}^n |v_i - m_i|, \text{ mandate/partid.} \quad (14)$$

$$I_{inv3} = \frac{M}{100n} \sum_{i=1}^n |v_i - m_i| \left/ \begin{cases} 1, & \text{at } n \text{ even} \\ 1-1/n^2, & \text{at } n \text{ odd} \end{cases} \right. \approx \frac{M}{100n} \sum_{i=1}^n |v_i - m_i|, \text{ seats/party.} \quad (14)$$

**Generalizarea abordărilor 1-3.** Comparând expresiile (10), (12) și (14) pentru cele trei abordări, se poate observa că în primele două cazuri acestea coincid, iar cea pentru cazul al treilea diferă puțin de primele două. Astfel, în calitate de indice quasi-invariant față de numărul  $M$  de mandate și numărul  $n$  de partide, ar putea fi folosit indicele  $I_{inv}$  care se determină ca

$$I_{inv} = \frac{M}{100n} \sum_{i=1}^n |v_i - m_i|, \text{ mandate/partid // seats/party.} \quad (15)$$

Indicele  $I_{inv}$  reprezintă numărul mediu de mandate ale unui partid, prin care distribuția  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  diferă de cea proporțională. În cazul folosirii în problema (1)-(4), ca criteriu de optimizare,  $I$  a indicelui  $I_{inv}$ , soluția optimă și, respectiv, valoarea optimă  $I_{inv}^*$  a indicelui  $I_{inv}$ , se obține, după cum se poate ușor demonstra (vezi, de exemplu, [4, 5]), conform metodei Hamilton, și coincide cu cea obținută la folosirea în calitate de criteriu de optimizare a indicelui  $I_d$ . Pentru  $I_{inv}^*$ , limita de jos

index, quasi invariant to  $M$  and  $n$ , can be used index  $I_{inv2}$ , which is determining as the product of  $I_d$  and ratio  $M/(100n)$ ; dividing by 100 is used for the reason that measure unit be in seats/party but not in percentage, namely

**Approach 3.** The definition domain of  $I_d^*$  is determined, accordingly to [5], by interval  $[\tilde{I}_d^*; \hat{I}_d^*]$ , where the bottom limit  $\tilde{I}_d^* = 0$  is obtained at proportional distribution ( $\Delta M = 0$ ), and the upper one  $\hat{I}_d^*$  is determining as

$$\hat{I}_d^* = \max I_d^* = \frac{50n}{M} \begin{cases} 1, & \text{at } n \text{ even} \\ 1-1/n^2, & \text{at } n \text{ odd} \end{cases}, \% \text{ seats.} \quad (13)$$

Accordingly to (13), the value  $\hat{I}_d^*$  is directly proportional to  $n/M$  at  $n$  even and is nearly directly proportional at  $n$  odd. Considering that the same proportionality is characteristic to index  $I_d^*$ , an index quasi invariant to the number  $M$  of seats and to the number  $n$  of parties could be, to a large extent, the index  $I_{inv3}$ , which, taking into account the expression (13), is determining as (is proposed dividing by 100 for the reason that measure unit be in seats/party but not in percentage)

**Generalization of approaches 1-3.** Comparing expressions (10), (12) and (14) for the three approaches, one can see that the first two cases coincide, and that for the third case differ little significant from the first two. Thus, as index, quasi invariant to the number  $M$  of seats and to the number  $n$  of parties could be used index  $I_{inv}$ , which is determining as

Index  $I_{inv}$  represents the mean number of seats to a party, by which the distribution  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  differs from the proportional one. In case of using the index  $I_{inv}$  as optimization criterion  $I$  in problem (1) - (4), the optimal solution and, respectively, the optimal value  $I_{inv}^*$  of index  $I_{inv}$ , is obtaining, as one can easily prove (see, by example, [4, 5]), accordingly to Hamilton method and this coincide with the one obtained, when using as optimization criterion the index  $I_d$ . For  $I_{inv}^*$ , the bottom limit  $\tilde{I}_{inv}^*$  is 0, and the

$\tilde{I}_{inv}^*$  este 0, iar cea de sus  $\hat{I}_{inv}^*$ , ținând cont de (12), se determină ca  $\hat{I}_{inv}^*$  upper one  $\hat{I}_{inv}^*$ , taking into account (13), is determining as

$$\hat{I}_{inv}^* = \frac{M}{100n} \hat{I}_d^* = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & \text{la } n \text{ par} \\ 1-1/n^2, & \text{la } n \text{ impar} \end{cases} \approx \frac{1}{2}, \text{ mandate/partid.} \quad (16)$$

$$\hat{I}_{inv}^* = \frac{M}{100n} \hat{I}_d^* = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & \text{at } n \text{ even} \\ 1-1/n^2, & \text{at } n \text{ odd} \end{cases} \approx \frac{1}{2}, \text{ seats/party.} \quad (16)$$

Astfel, în cazul folosirii în problema (1)-(4) în calitate de criteriu de optimizare  $I$  a indicelui  $I_d$  sau al celui  $I_{inv}$ , domeniul de definiție al indicelui  $I_{inv}^*$  pentru soluțiile optime respective nu depinde, practic, de măsurile  $M$  și  $n$  și este:  $I_{inv}^* \in [0; 0,5]$  mandate/partid. Thus, when using index  $I_d$  or the  $I_{inv}$  one as optimization criterion in problem (1)-(4), the definition domain of index  $I_{inv}^*$  for the respective optimal solutions does not depend, practically, on measures  $M$  and  $n$  and is:  $I_{inv}^* \in [0; 0,5]$  seats/party.

### 5. Concluzii

În cercetări comparative a diverselor cazuri de luare a deciziilor colective prin votare RPL, sunt utili indicii invariante față de anumite date inițiale. Este definită noțiunea de asemenea invarianță și este propus indicele  $I_{inv}$ , quasi invariant față de numărul de mandate în organul electiv și, de asemenea, față de numărul de partide. Indicele  $I_{inv}$  reprezintă numărul mediu de mandate la un partid, prin care distribuția optimă a mandatelor între partide diferă de cea proporțională. La folosirea acestui indice în calitate de criteriu de minimizare a disproporționalității, soluția optimă se obține conform metodei Hamilton [4], iar domeniul de definiție al  $I_{inv}$  pentru soluțiile optime este determinat de intervalul  $[0; 0,5]$  mandate/partid.

### 5. Conclusions

In comparative analyses of various cases of collective decision making by LPR voting, are useful indices, invariant to some initial data. It is defined the notion of invariance and is proposed the index  $I_{inv}$ , quasi invariant to the number of seats in the elective body and, also, to the number of parties. Index  $I_{inv}$  represents the mean number of seats to a party, by which the optimal distribution of seats among parties differs from the proportional one. When using this index as disproportionality minimization criterion, the optimal solution is obtaining accordingly to Hamilton method [4], and the definition domain of  $I_{inv}$  for the optimal solutions is determining by the interval  $[0; 0,5]$  seats/party.

### Bibliografie/Bibliography:

1. Gallagher M. Proportionality, Disproportionality and Electoral Systems. In: Electoral Studies (1991), 10:1, p. 33-51.
2. Rae D.W. The Political Consequences of Electoral Lows. New Heaven: Yale University Press, 1967.
3. Grofman, B. and Lijphart, A. Electoral Lows and their Political Consequences. – New York: Agathon Press, 1986.
4. Bolun I. Algorithmization of optimal allocation of seats in PR systems// *Economica*, nr.3(77)/2011. – Chișinău: Editura ASEM. - p. 137-152.
5. Bolun I. Seats allocation in party-list elections. In: *Economica*, nr.2(76)/2011. – Chișinău: Editura ASEM. – p. 138-151.