004.421:330.47

DETERMINAREA REPARTIZĂRILOR CU FAVORIZARE TOTALĂ, FOLOSIND METODA CU DIVIZOR LINIAR GENERAL

Prof. univ. dr. hab. Ion Bolun, ASEM
ion.bolun@isa.utm.md
https://doi.org/10.53486/econ.2021.115.109

În această lucrare, sunt discutate aspecte ale favorizării totale a beneficiarilor mari sau a celor mici, la repartizarea proporţională a entităţilor, folosind metodele cu divizor liniar (LDM). În acest scop, au fost definite cerinţele conformităţii repartizărilor cu soluţia metodelor cu divizor liniar şi au fost determinate condiţiile conformităţii repartizărilor LDM cu cerinţele de favorizare totală a beneficiarilor mari sau a celor mici. Ulterior, a fost elaborat algoritmul A1 de determinare a repartizărilor LDM ce favorizează total beneficiarii. Folosind A1, au fost efectuate calcule pentru trei exemple, obţinându-se: repartizarea metodei d'Hondt ce favorizează total beneficiarii mari, repartizarea metodei Sainte-Laguë, ce favorizează total beneficiarii mari şi repartizarea metodei Divizor liniar dependent, ce favorizează total beneficiarii mici. Rezultatele obţinute confirmă oportunitatea utilizării algoritmului A1 pentru determinarea repartizărilor LDM, ce îi favorizează total pe beneficiarii mari sau, dimpotrivă, pe cei mici.

Cuvinte-cheie: *algoritm, cerinţe de favorizare totală, metodă de repartizare, metodă cu divizor liniar, soluţia metodei de repartizare.*

JEL: C61, C63.

1. Introducere

Adesea, este necesar să se distribuie un număr dat M de entităţi discrete, de acelaşi tip, între n beneficiari, proporţional unei caracteristici numerice V_i, $i = \overline{1,n}$, atribuite fiecăruia dintre ei. Aceasta este cunoscută sub numele de problemă de repartizare proporţională (PRP) [1-3]. Caracteristica, în întregime, a acestei probleme implică, de obicei, o anumită disproporţie a repartizării $\{x_i,\ i = \overline{1,n}\}$ [1, 4, 5], unii beneficiari fiind favorizaţi în detrimentul altora. Favorizarea beneficiarilor duce la creşterea disproporţionalităţii şi

004.421:330.47

DETERMINING TOTAL FAVOURING APPORTIONMENTS USING THE GENERAL LINEAR DIVISOR METHOD

Professor, Dr. Hab. Ion BOLUN, ASEM
ion.bolun@isa.utm.md
https://doi.org/10.53486/econ.2021.115.109

Aspects of total favouring of large or small beneficiaries in proportional apportionments of entities using linear divisor methods (LDM) are discussed in the paper. In this aim, the requirements of apportionments compliance with linear divisor methods' solution were defined and the conditions of LDM apportionments compliance with the requirements of total favouring large or small beneficiaries were determined. Subsequently, the A1 algorithm for determining the LDM apportionments which totally favour beneficiaries was elaborated. Using A1, calculations for three examples were performed, obtaining: a d'Hondt method's apportionment which totally favours large beneficiaries, a Sainte-Laguë method's apportionment which totally favours large beneficiaries and a Dependent linear divisor method's apportionment which totally favors small beneficiaries. Obtained results confirm the opportunity of using the algorithm A1 for the determining of LDM apportionments which totally favour large beneficiaries or, on the contrary, the small ones.

Keywords: *algorithm, apportionment method, apportionment method's solution, linear divisor method, requirements of total favouring.*

JEL: C61, C63.

1. Introduction

It is often necessary to distribute a given number M of discrete entities of the same kind among n beneficiaries, in proportion to a numerical characteristic assigned to each of them V_i, $i = \overline{1,n}$. This is known as proportional apportionment (APP) problem [1-3]. The integer character of this problem usually causes a certain disproportion of the apportionment $\{x_i,\ i = \overline{1,n}\}$ [1, 4, 5], some beneficiaries being favoured at the expense of the others. Favouring of beneficiaries leads to the increase of disproportionality and invers. Prin urmare, reducerea favorizării în cauză constituie una dintre cerinţele de bază la alegerea metodei PRP, ce trebuie aplicată în situaţii concrete (condiţia de nepărtinire) [1, 3].

După cum se ştie, metoda d'Hondt [6] îi favorizează pe beneficiarii mari (cu valoarea V_i mai mare) [1, 4, 7, 8], iar metoda Huntington-Hill [9] îi favorizează pe cei mici (cu valoare V_i mai mică) [4, 10]. Dar care dintre cele două favorizează beneficiarii într-o măsură mai mare? Preferinţele, în acest sens, între metode, pot ajuta. De exemplu, Marshall, Olkin și Pukelsheim [11, p.1] au plasat cinci metode PRP „în ordinea în care se ştie că favorizează partidele mai mari faţă de partidele mai mici”. Cu toate acestea, cea mai bună modalitate constă în estimarea cantitativă a acestei proprietăţi. O abordare, în acest scop, este propusă de către autorul acestui articol în [12]. O altă, „de favorizare totală”, bazată pe definiţia favorizării beneficiarilor mari sau a celor mici printr-o metodă de repartizare propusă de către Balinski şi Young [1], a fost examinată de către autor în articolul [15]. În lucrarea dată, este demonstrat că frecvenţa favorizării totale în repartizări, pentru metodele Hamilton (Hare) [13], Sainte-Laguë (Webster) [14], d'Hondt (Jefferson), Huntington-Hill şi Sainte-Laguë adaptată, este puternic descrescătoare faţă de n, devenind aprox. 0 la $n \geq 7\div10$. Unele aspecte ale determinării repartizărilor metodei Divizor liniar general (GLD), ce îi favorizează total pe beneficiarii mari sau pe cei mici, sunt examinate în această lucrare.

2. Esenţa favorizării şi a favorizării totale a beneficiarilor în repartizări

Esenţa favorizării beneficiarilor în repartizări este descrisă în lucrările lui Gallacher [4], Sorescu şi Pârvulescu [7] și Tannenbaum [10] ş.a. Autorul în articolul [12], de exemplu, distinge trei noţiuni de favorizare a beneficiarilor de către o metodă PRP:

a) favorizarea unui beneficiar într-o repartizare;
b) favorizarea beneficiarilor mari sau a celor mici într-o repartizare;
c) favorizarea beneficiarilor mari sau a celor mici, în general, de către o metodă de repartizare.

Se consideră că un beneficiar i este favorizat, dacă lui i se distribuie un număr x_i de entităţi mai mari, decât i s-ar cuveni, conform valorii V_i, mai exact, dacă $x_i > MV_i /V$, unde $M = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ şi $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$.

vice versa. Therefore, reducing the favouring in question is one of the basic requirements when is choosing the APP method to be applied under concrete situations (free of bias condition) [1, 3].

As it is well known, the d’Hondt method [6] favours large beneficiaries (with larger V_i value) [1, 4, 7, 8], and Huntington-Hill method [9] favours the small ones (with smaller V_i value) [4, 10]. But which of the two favours beneficiaries to a larger extent? Preferences, in this sense, between methods, can help. For example, in [11], five APP methods are placed “in the order as they are known to favour larger parties over smaller parties”. However, the best way is to estimate this property quantitatively. One approach in this aim is proposed in [12]. Another, the “total favouring”, based on the definition of favouring of large beneficiaries or of the small ones by an apportionment method done in [1], is examined in [15]. In the last paper, it was shown that the frequency of total favouring in apportionments, for the widely used Hamilton (Hare) [13], Sainte-Laguë (Webster) [14], d’Hondt (Jefferson), Huntington-Hill and Adapted Sainte-Laguë methods, is strongly decreasing on n, becoming approx. 0 at $n \geq 7\div10$. Some aspects of the determination of General linear divisor (GLD) method apportionments, which totally favour large beneficiaries or the small ones, are examined in this paper.

2. Essence of favouring and of total favouring of beneficiaries in apportionments

The essence of favouring beneficiaries in apportionments is described in such papers as [4, 7, 10]. In [12], for example, three notions of favouring beneficiaries by an APP method are distinguished:

a) favouring a beneficiary in an apportionment;
b) favouring large beneficiaries or of the small ones in an apportionment;
c) favouring large beneficiaries or of the small ones overall by an apportionment method.

It is considered that a beneficiary i is favoured if a larger number x_i of entities is distributed to him than would be due according to the V_i value, more precisely if $x_i > MV_i /V$, where $M = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ and $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$. Of course, the lack of favouring is possible only if the equalities $a_i = MV_i/V$, $i = \overline{1,n}$ take place; here

Desigur, lipsa favorizării este posibilă, numai dacă au loc egalităţile $a_i = MV_i / V$, $i = \overline{1,n}$; aici $a_i = \lfloor MV_i/V \rfloor$, unde $\lfloor z \rfloor$ semnifică partea întreagă a numărului real z. În practică, astfel de egalităţi au loc rar şi, de aceea, unii beneficiari sunt favorizaţi, iar alţii, respectiv, sunt defavorizaţi. Se va folosi, de asemenea, notarea $\Delta M = M - a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

În mod formalizat, probabil, prima definiţie a favorizării beneficiarilor mari sau a celor mici de către o metodă PRP este dată de către Balinski şi Young [1]. Dar cerinţele acestei definiţii sunt foarte puternice – nu se cunosc metode conforme lor, care s-ar folosi în practică. În acelaşi timp, aceste condiţii pot fi utilizate pentru a identifica „favorizarea totală" a beneficiarilor mari sau a celor mici în repartizări concrete [15]. De asemenea, (Bolun, 2020) [12], condiţiile definiţiei respective (Balinski şi Young, 2001) [1] au fost simplificate, reducând considerabil volumul calculelor necesare pentru simularea informatică (a se vedea Definiţia 1).

Definiţia 1. Într-o repartizare, beneficiarii mari sunt total favorizaţi, dacă:

$$\frac{x_i}{V_i} > \frac{x_j}{V_j}, \quad (1)$$

iar beneficiarii mici sunt total favorizaţi, dacă

$$\frac{x_i}{V_i} < \frac{x_j}{V_j}, \quad (2)$$

pentru orice $x_i > x_j$, unde i şi j iau valori din cele $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ (Bolun, 2020) [12].

De obicei, într-una şi aceeaşi repartizare, pot fi favorizaţi unii beneficiari mari şi unii mici şi, totuşi, să fie favorizaţi, în mod preponderent, beneficiarii mari sau, dimpotrivă, cei mici. De aceea, (Bolun, 2020) [12] se propune utilizarea a două noţiuni diferite: „favorizarea" beneficiarilor mari sau a celor mici şi „favorizarea totală" a beneficiarilor mari sau a celor mici, a doua fiind caz particular al primei noţiuni. Conformitatea unei repartizări a cerinţei (1) sau celei (2) se referă la „favorizarea totală" a beneficiarilor mari sau, respectiv, a celor mici. Noţiunea mai largă de „favorizare" a beneficiarilor mari sau a celor mici este utilizată atunci, când, într-o repartizare, sunt favorizaţi, preponderent beneficiarii mari sau, dimpotrivă, cei mici (Bolun, 2020) [12].

Pentru a identifica dacă, la aplicarea unei metode PRP, se pot obţine repartizări, care să-i favorizeze total pe beneficiarii mari sau pe cei mici, este necesar să se cunoască cerinţele de conformitate ale metodei PRP în cauză cu cerinţa (1) sau, respectiv, cu cea (2).

$a_i = \lfloor MV_i/V \rfloor$, where $\lfloor z \rfloor$ means the integer part of the real number z. In practice, such equalities rarely occur and that is why some beneficiaries are favoured and others, respectively, are disfavoured. The notation $\Delta M = M - a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ will also be used.

In formalized form, the first, probably, definition of favouring large or small beneficiaries by an APP method is given in [1]. But the requirements of this definition are very strong – no methods compliant to them and used in practice are known. At the same time, as mentioned in [15], these conditions can be used to identify the "total favouring" of large beneficiaries or of the small ones in concrete apportionments. Also, in (Bolun, 2020) [12], the conditions of the respective definition in (Balinski şi Young, 2001) [1] were simplified, reducing considerably the volume of needed calculations for computer simulation (see Definition 1).

Definition 1. In an apportionment, large beneficiaries are totally favoured if**:**

and small beneficiaries are totally favoured if

whenever $x_i > x_j$, where i and j take values from the $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ones [12].

Usually, in one and the same apportionment some large and some small beneficiaries can be favoured and, nevertheless, mainly large or, on the contrary, small beneficiaries can be favoured. Therefore, in (Bolun, 2020) [12] it is proposed to use two different notions: "favouring" of large or small beneficiaries and "total favouring" of large or of small beneficiaries, the second being a particular case of the first one. The compliance of an apportionment with requirement (1) or with the (2) one is referred to "total favouring" of large beneficiaries or, respectively, of the small ones. The larger notion of "favouring" of large beneficiaries or of the small ones is used when in an apportionment are predominantly favoured large beneficiaries or, on the contrary, the small ones in sense of (Bolun, 2020) [12].

In order to identify whether apportionments that fully favour large or small beneficiaries can be obtained when applying an APP method, it is necessary to know the compliance requirements of the APP method in question with requirement (1) or, respectively, the (2) one.

3. Condiţiile de conformitate a repartizărilor GLD cu cerinţa (1) sau cu cea (2)

Condiţiile de conformitate a repartizărilor GLD cu cerinţa (1) sau cu cerinţa (2) sunt definite de Afirmaţia 1 şi Afirmaţia 2.

Afirmaţia 1. Condiţiile de conformitate a repartizării $\{x_i,\ i=\overline{1,n}\}$ cu soluţia metodei Divizor liniar general [8] sunt:

3. Conditions for the compliance of GLD apportionments with requirements (1) or (2)

The conditions for compliance of GLD method's apportionments with requirements (1) or the (2) one are defined by Statement 1 and Statement 2.

Statement 1. The conditions of an apportionment $\{x_i,\ i=\overline{1,n}\}$ compliance with the General linear divisor method [8] solution are:

$$V_j\frac{c(x_i-1)+1}{cx_j+1} < V_i < V_j\frac{cx_i+1}{c(x_j-1)+1},\ (i,j)=\overline{1,n}, i\neq j. \tag{3}$$

Într-adevăr, regula de repartizare a metodei Divizor liniar general este:

Indeed, the General linear divisor method apportionment rule is**:**

$$j \succ i, \text{ if } \frac{V_j}{cu_j+1} > \frac{V_i}{cu_i+1}, \tag{4}$$

unde u_k este numărul de entităţi, deja, alocate beneficiarului k [8]. Ţinând cont de (4), pentru perechea $\{x_i, x_j\}$, este uşor să se obţină condiţia obligatorie de conformitate a repartizării $\{x_i,\ i=\overline{1,n}\}$ cu soluţia metodei Divizor liniar general:

where u_k is the number of entities already allocated to beneficiary k [8]. Given (4), for the pair $\{x_i, x_j\}$, it is easy to obtain the obligatory condition of apportionment $\{x_i,\ i=\overline{1,n}\}$ compliance with the General linear divisor method solution**:**

$$\frac{V_j}{c(x_j-1)+1} > \frac{V_i}{cx_i+1}, \frac{V_i}{c(x_i-1)+1} > \frac{V_j}{cx_j+1},\ (i,j)=\overline{1,n}, i\neq j,$$

de unde, în urma unor transformări elementare, se obţine (3). ■

Fie N = {1, 2, 3, …, n}, iar N_i este o asemenea submulţime a N că $j \in N_i$ pentru orice $x_j > x_i$, unde $(i, j) \in N$. Astfel, $N_1 = \varnothing$. De asemenea, pentru simplitate, se va considera că $V_0/x_0 = 0$ şi $V_{n+1}/x_{n+1} = \infty$.

Afirmaţia 2. Pentru metodele cu divizor liniar şi $c > 0$ [8], condiţia de conformitate a repartizării $\{x_i,\ i=\overline{1,n}\}$ cu cerinţa (1) de favorizare totală a beneficiarilor mari este:

from where, after elementary transformations, one has (3). ■

Let N = {1, 2, 3, …, n} and N_i is such a subset of N that $j \in N_i$ whenever $x_j > x_i$, where $(i, j) \in N$. So, $N_1 = \varnothing$. Also, for simplicity, it will be considered that $V_0/x_0 = 0$ and $V_{n+1}/x_{n+1} = \infty$.

Statement 2. For linear divisor methods with $c > 0$ [8], the condition of the apportionment $\{x_i,\ i=\overline{1,n}\}$ compliance with requirement (1) of total favouring of large beneficiaries is:

$$\begin{gathered}\max\left\{\max_{j\in N_i}\left(V_j\frac{x_i}{x_j}\right), \max_{j\in N\backslash i}\left[V_j\frac{c(x_i-1)+1}{cx_j+1}\right]\right\} < V_i < \\ < \min\left\{\min_{j\in N\backslash(i,N_i)}\left(V_j\frac{x_i}{x_j}\right);\ \min_{j\in N\backslash i}V_j\frac{cx_i+1}{c(x_j-1)+1}\right\}, i=\overline{1,n},\end{gathered} \tag{5}$$

iar cu cerinţa (2) de favorizare totală a beneficiarilor mici este:

and with requirement (2) of total favouring of small beneficiaries is:

$$\begin{gathered}\max\left\{\max_{j\in N\backslash(i,N_i)}\left(V_j\frac{x_i}{x_j}\right), \max_{j\in N\backslash i}\left[V_j\frac{c(x_i-1)+1}{cx_j+1}\right]\right\} < V_i < \\ < \min\left\{\min_{j\in N_i}\left(V_j\frac{x_i}{x_j}\right);\ \min_{j\in N\backslash i}V_j\frac{cx_i+1}{c(x_j-1)+1}\right\}, i=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{6}$$

Într-adevăr, metodele cu divizor liniar şi c> 0 sunt cazuri particulare ale metodei Divizor

Indeed, linear divisor methods with $c > 0$ are particular cases of General linear divisor liniar general. Din (1), avem $V_i > V_j x_i/x_j$, $j \in N_i$ şi $V_i < V_j x_i/x_j$, $j \in N\backslash(i,N_i)$, $i = \overline{1,n}$. Combinând aceste relaţii cu cele (3), este uşor de obţinut (5).

În mod similar, din (2) avem $V_i < V_j x_i/x_j$, $j \in N_i$ şi $V_i > V_j x_i/x_j$, $j \in N\backslash(i,N_i)$, $i = \overline{1,n}$. Combinând aceste relaţii cu cele (3), este uşor de obţinut (6). ▼

Rămâne să se arate consistenţa cerinţelor (5) şi (6). În ce priveşte (5), ţinând cont de definirea N_i, avem $\max\{V_j x_i/x_j, j \in N_i\} < \min\{V_j x_i/x_j, j \in N\backslash(i,N_i)\}$. De asemenea, la $c > 0$ avem $V_j(cx_i + 1)/[c(x_j - 1) + 1] - V_j[c(x_i - 1) + 1]/(cx_j + 1) = V_j(cx_i + 1)/[(cx_j + 1) - c] - V_j[(cx_i + 1) - c]/(cx_j + 1) > 0$, $(i, j) \in N$, $j \neq i$. Deci, partea stângă a relaţiei (5) este întotdeauna mai mică, decât partea dreaptă.

În mod similar, în ce priveşte cerinţa (6), avem $\max\{V_j x_i/x_j, j \in N\backslash(i,N_i\} < \min\{V_j x_i/x_j, j \in N_i\}$. Deci, ţinând cont că $c > 0$, după cum este arătat mai sus, are loc $V_j(cx_i + 1)/[c(x_j - 1) + 1] - V_j[c(x_i - 1) + 1]/(cx_j + 1) = > 0$, $(i, j) \in N$, $j \neq i$. Astfel, partea stângă a relaţiei (6) este întotdeauna mai mică, decât partea dreaptă. ■

Afirmaţia 3. Pentru metodele cu divizor liniar şi $c \geq 1$, cerinţa (5) de favorizare totală de către repartizarea $\{x_i, i = \overline{1,n}\}$ a beneficiarilor mari poate fi înlocuită cu:

method. From (1) one has $V_i > V_j x_i/x_j$, $j \in N_i$ and $V_i < V_j x_i/x_j$, $j \in N\backslash(i,N_i)$, $i = \overline{1,n}$. Combining these relations with the (3) ones, it is easy to obtain (5).

Similarly, from (2) one has $V_i < V_j x_i/x_j$, $j \in N_i$ and $V_i > V_j x_i/x_j$, $j \in N\backslash(i,N_i)$, $i = \overline{1,n}$. Combining these relations with the (3) ones, it is easy to obtain (6). ▼

It remains to show the consistency of requirements (5) and (6). With reference to the (5) one, taking into account the definition of N_i, one has $\max\{V_j x_i/x_j, j \in N_i\} < \min\{V_j x_i/x_j, j \in N\backslash(i,N_i)\}$. Also, at $c > 0$ one has $V_j(cx_i + 1)/[c(x_j - 1) + 1] - V_j[c(x_i - 1) + 1]/(cx_j + 1) = V_j(cx_i + 1)/[(cx_j + 1) - c] - V_j[(cx_i + 1) - c]/(cx_j + 1) > 0$, $(i, j) \in N$, $j \neq i$. Thus, the left part of relation (5) is always smaller than its right part.

In a similar mode, with refer to requirement (6), one has $\max\{V_j x_i/x_j, j \in N\backslash(i,N_i\} < \min\{V_j x_i/x_j, j \in N_i\}$. Thus, taking into account that at $c > 0$, as shown above, takes place $V_j(cx_i + 1)/[c(x_j - 1) + 1] - V_j[c(x_i - 1) + 1]/(cx_j + 1) = > 0$, $(i, j) \in N$, $j \neq I$, the left part of relation (6) is always smaller than its right part. ■

Statement 3. For linear divisor methods with $c \geq 1$, requirement (5) of apportionment $\{x_i, i = \overline{1,n}\}$ total favouring of large beneficiaries can be replaced by:

$$\max\left\{\max_{j\in N_i}\left(V_j\frac{x_i}{x_j}\right), \max_{j\in N\backslash(i,N_i)}\left[V_j\frac{c(x_i-1)+1}{cx_j+1}\right]\right\} < V_i < \\ < \min\left\{\min_{j\in N\backslash(i,N_i)}\left(V_j\frac{x_i}{x_j}\right);\ \min_{j\in N_i} V_j\frac{cx_i+1}{c(x_j-1)+1}\right\}, i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

iar cerinţa (5) de favorizare totală de către repartizarea $\{x_i, i = \overline{1,n}\}$ a beneficiarilor mici poate fi înlocuită cu:

and requirement (6) of apportionment $\{x_i, i = \overline{1,n}\}$ total favouring of small beneficiaries can be replaced by:

$$\max\left\{\max_{j\in N\backslash(i,N_i)}\left(V_j\frac{x_i}{x_j}\right), \max_{j\in N\backslash i}\left[V_j\frac{c(x_i-1)+1}{cx_j+1}\right]\right\} < V_i < \\ < \min\left\{\min_{j\in N_i}\left(V_j\frac{x_i}{x_j}\right);\ \min_{j\in N\backslash(i,N_i)} V_j\frac{cx_i+1}{c(x_j-1)+1}\right\}, i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Într-adevăr, este uşor de demonstrat că:

Indeed, it is easy to show that:

$x_i/x_j - [c(x_i - 1) + 1]/(cx_j + 1) = [x_j(c - 1) + x_i]/[x_j(cx_j + 1)]$ şi/and

$(cx_i + 1)/[c(x_j - 1) + 1]/(cx_i + 1) - x_j/x_i = [x_i(c - 1) + x_j]/[x_i(cx_i + 1)]$.

Astfel, la $c \geq 1$ au loc:

So, at $c \geq 1$ occur:

$$\frac{x_i}{x_j} > \frac{c(x_i-1)+1}{cx_j+1}, \frac{cx_i+1}{c(x_j-1)+1} > \frac{x_i}{x_j}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}, i \neq j. \tag{9}$$

Luând în considerare aceste inegalităţi, cerinţa (5) ia forma (7) şi cerinţa (6) – forma (8). ■

Taking into account these inequalities, requirement (5) takes the form (7) and requirement (6) – the form (8). ■

Este mai uşor de analizat repartizările atunci, când beneficiarii sunt ordonaţi după valorile V_i, $i = \overline{1,n}$ sau cele x_i, $i = \overline{1,n}$.

Afirmaţia 4. Considerând $x_i > x_{i+1}$, $i = \overline{1,n-1}$, cerinţele (5) şi (6) la $c > 0$ pot fi înlocuite cu:

It is easier to analyse apportionments when beneficiaries are ordered by V_i, $i = \overline{1,n}$ values or the x_i, $i = \overline{1,n}$ ones.

Statement 4. Considering $x_i > x_{i+1}$, $i = \overline{1,n-1}$, requirements (5) and (6) at $c > 0$ can be replaced by, respectively:

$$\max\left\{V_{i-1}\frac{x_i}{x_{i-1}}, \max_{j=\overline{1,n}\setminus i}\left[V_j\frac{c(x_i-1)+1}{cx_j+1}\right]\right\} < V_i < \min\left\{V_{i+1}\frac{x_i}{x_{i+1}}; \min_{j=\overline{1,n}\setminus i}\left[V_j\frac{cx_i+1}{c(x_j-1)+1}\right]\right\}\ i = \overline{1,n} \tag{10}$$

şi, respectiv:

and:

$$\max\left\{V_{i+1}\frac{x_i}{x_{i+1}}, \max_{j=\overline{1,n}\setminus i}\left[V_j\frac{c(x_i-1)+1}{cx_j+1}\right]\right\} < V_i < \min\left\{V_{i-1}\frac{x_i}{x_{i-1}}; \min_{j=\overline{1,n}\setminus i}\left[V_j\frac{cx_i+1}{c(x_j-1)+1}\right]\right\}, i = \overline{1,n}, \tag{11}$$

iar la $c \geq 1$, acestea şi, de asemenea, cerinţele (7) şi (8)) pot fi înlocuite cu:

and at $c \geq 1$ they (and also requirements (7) and (8)) can be replaced by:

$$\max\left\{V_{i-1}\frac{x_i}{x_{i-1}}, \max_{j=\overline{\imath+1,n}}\left[V_j\frac{c(x_i-1)+1}{cx_j+1}\right]\right\} < V_i < \min\left\{V_{i+1}\frac{x_i}{x_{i+1}}; \min_{j=\overline{1,\imath-1}}\left[V_j\frac{cx_i+1}{c(x_j-1)+1}\right]\right\}\ i = \overline{1,n}. \tag{12}$$

şi, respectiv:

and:

$$\max\left\{V_{i+1}\frac{x_i}{x_{i+1}}, \max_{j=\overline{1,\imath-1}}\left[V_j\frac{c(x_i-1)+1}{cx_j+1}\right]\right\} < V_i < \min\left\{V_{i-1}\frac{x_i}{x_{i-1}}; \min_{j=\overline{\imath+1,n}}\left[V_j\frac{cx_i+1}{c(x_j-1)+1}\right]\right\}, i = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Într-adevăr, deoarece $x_i > x_{i+1}$, $= \overline{1,n-1}$, avem $N_i = \{1, 2, 3, \ldots, i-1\}$ şi în baza (1) are loc:

Indeed, because of $x_i > x_{i+1}$, $i = \overline{1,n-1}$, one has $N_i = \{1, 2, 3, \ldots, i-1\}$ and based on (1) occur:

$$\max_{j=\overline{1,\imath-1}}\left(V_j\frac{x_i}{x_j}\right) = V_{i-1}\frac{x_i}{x_{i-1}},\ \min_{j=\overline{\imath+1,n}}\left(V_j\frac{x_i}{x_j}\right) = V_{i+1}\frac{x_i}{x_{i+1}}, i = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Luând în considerare aceste egalităţi, cerinţa (5) ia forma (10). De asemenea, în baza (2) are loc:

Taking into account these equalities, requirement (5) takes the form (10). Also, based on (2) occur:

$$\max_{j=\overline{\imath+1,n}}\left(V_j\frac{x_i}{x_j}\right) = V_{i+1}\frac{x_i}{x_{i+1}},\ \min_{j=\overline{1,\imath-1}}\left(V_j\frac{x_i}{x_j}\right) = V_{i-1}\frac{x_i}{x_{i-1}}, i = \overline{1,n} \tag{15}$$

şi, respectiv, cerinţa (6) ia forma (11). ▼

Referitor la cerinţele (12) şi (13), ţinând cont că $N_i = \{1, 2, 3, \ldots, i-1\}$ şi în baza (7) şi (14) este uşor de obţinut (12), iar în baza (8) şi (15) se poate uşor obţine (13). ■

and, respectively, requirement (6) takes the form (11). ▼

With reference to requirements (12) and (13), taking into account that $N_i = \{1, 2, 3, \ldots, i-1\}$ and based on (7) and (14) it is easy to obtain

Se poate observa că, din cauza relaţiei (9), fiecare dintre cerinţele (5) şi (6) sunt mai puternice decât cerinţa (3).

Consecinţa 1. Metoda Divizor liniar general nu întotdeauna este conformă cu cerinţa (1) de favorizare totală a beneficiarilor mari şi cu cerinţa (2) de favorizare totală a beneficiarilor mici.

Într-adevăr, din cauza relaţiei (9), condiţia (3) nu întotdeauna este conformă cu fiecare dintre cele (1) şi (2). ■

Consecinţa 2. Metoda d'Hondt nu întotdeauna este conformă cu condiţia (1) de favorizare totală a beneficiarilor mari.

Într-adevăr, metoda d'Hondt constituie în caz particular al metodei Divizor liniar general la c = 1. ■

Consecinţa 3. Metoda Divizor liniar dependent nu întotdeauna este conformă cu condiţia (2) de favorizare totală a beneficiarilor mici.

Așadar, metoda Divizor liniar dependent este un caz particular al metodei Divizor liniar general la $c = \max\{2, n - 1\}$. ■

În acelaşi mod, se poate afirma că, la c > 0, niciuna dintre metodele cu divizor liniar nu întotdeauna este conformă cu cerinţa (1) de favorizare totală a beneficiarilor mari şi cu cerinţa (2) de favorizare totală a beneficiarilor mici.

4. Determinarea repartizărilor care îi favorizează total pe beneficiarii mari sau pe cei mici

Prezintă interes determinarea repartizărilor, care îi favorizează total pe beneficiarii mari sau pe cei mici. Evident, pentru repartizările „proporţionale" cercetate în această lucrare, dacă $x_i > x_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$, atunci relaţiile $V_i > V_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$ au loc, de asemenea. Dar care ar trebui să fie relaţia dintre V_i şi x_i, indiferent de metoda PRP folosită?

Afirmaţia 5. La $x_i > x_{i+1}$, dacă $x_i/V_i > x_{i+1}/V_{i+1}$, atunci relaţia $V_i > V_{i+1}$ se petrece, doar dacă are loc:

(12), and based on (8) and (15) one can easy obtain (13). ■

It can be observed that because of relation (9), each of requirements (5) and (6) are stronger than the (3) one.

Consequence 1. The General linear divisor method not always is compliant with requirement (1) of total favouring of large beneficiaries and with requirement (2) of total favouring of small beneficiaries.

Indeed, because of relation (9), the condition (3) not always is compliant with each of the (1) and (2) ones. ■

Consequence 2. The d'Hondt method not always is compliant with the condition (1) of total favouring of large beneficiaries.

Indeed, d'Hondt method is a particular case of the General linear divisor method at $c = 1$. ■

Consequence 3. The Dependent linear divisor (DLD) method [8] not always is compliant with the conditions (2) of total favouring of small beneficiaries.

Indeed, DLD method is a particular case of General linear divisor method at $c = \max\{2, n - 1\}$. ■

In the same way, one can say that at $c > 0$ no one of linear divisor methods is always compliant with the requirement (1) of total favouring of large beneficiaries and with the requirement (2) of total favouring of small beneficiaries.

4. Determining apportionments that totally favours large or small beneficiaries

It is of interest to determine apportionments that totally favours large beneficiaries or the small ones. Evidently, for "proportional" apportionments examined in this paper, if $x_i > x_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$ then the relations $V_i > V_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$ occur, too. But what must be the relation between V_i and x_i, regardless of the APP method used?

Statement 5. At $x_i > x_{i+1}$, if $x_i/V_i > x_{i+1}/V_{i+1}$, then the relation $V_i > V_{i+1}$ occurs only if take place:

$$\frac{V_i}{x_i} > \frac{1}{x_i - x_{i+1}} \left\lfloor (x_i - x_{i+1}) \frac{V_i}{x_i} \right\rfloor > \frac{1}{x_i - x_{i+1}}, \qquad (16)$$

iar dacă $x_i/V_i < x_{i+1}/V_{i+1}$, atunci relaţia $V_i > V_{i+1}$ are loc întotdeauna.

Într-adevăr, în baza $x_i/V_i > x_{i+1}/V_{i+1}$, avem $V_{i+1} > V_i x_{i+1}/x_i$ şi, luând în considerare relaţia $V_i > V_{i+1}$, valoarea minimală $V_{i+1\ \min}$ a V_{i+1} se determină ca $V_{i+1\ \min} = \lfloor V_i x_{i+1}/x_i \rfloor + 1$. Deci, avem $\lfloor V_i x_{i+1}/x_i \rfloor$

and if $x_i/V_i < x_{i+1}/V_{i+1}$, then the relation $V_i > V_{i+1}$ always occurs.

Indeed, based on $x_i/V_i > x_{i+1}/V_{i+1}$, one has $V_{i+1} > V_i\ x_{i+1}/x_i$ and, taking into account the relation $V_i > V_{i+1}$, the minimal possible V_{i+1} value ($V_{i+1\ \min}$) is determined as $V_{i+1\ \min} = \lfloor V_i x_{i+1}/x_i \rfloor + 1$.

$+ 1 < V_i$, adică $\lfloor(x_{i+1} - x_i)V_i/x_i\rfloor + 1 < 0$ sau $(x_i - x_{i+1})V_i/x_i > \lfloor(x_i - x_{i+1})V_i/x_i\rfloor > 1$, de unde rezultă relaţiile (16). ▼

De asemenea, în baza $x_i/V_i < x_{i+1}/V_{i+1}$, avem $V_{i+1} < V_i\, x_{i+1}/x_i$ şi, luând în considerare relaţia $V_i > V_{i+1}$, valoarea maximală $V_{i+1\ \max}$ a V_{i+1} se determină ca $V_{i+1\ \max} = \lceil V_i\, x_{i+1}/x_i\rceil - 1$. Deci, avem $\lceil V_i\, x_{i+1}/x_i\rceil - 1 < V_i$, adică $\lceil(x_{i+1} - x_i)V_i/x_i\rceil - 1 < 0$ sau $(x_i - x_{i+1})V_i/x_i > \lceil(x_i - x_{i+1})V_i/x_i\rceil > -1$, care are loc întotdeauna. ■

Un alt factor de influenţă, la determinarea repartizărilor, care îi favorizează total pe beneficiarii mari sau pe cei mici, este metoda PRP aplicată. Din multitudinea de metode PRP, sunt examinate câteva metode cu divizor liniar. Este bine cunoscut faptul că metoda d'Hondt ($c = 1$) îi favorizează puternic pe beneficiarii mari [4, 7]. Totodată, cu cât valoarea lui c este mai mică, cu atât este mai mare gradul de favorizare a beneficiarilor mari de către metoda cu divizor liniar respectiv [8]. De aceea, în continuare, sunt luate în considerare doar cazurile cu $c \geq 1$.

Una dintre modalităţile de determinare a repartizărilor, care îi favorizează total pe beneficiarii mari/mici, pentru metodele cu divizor liniar la $c \geq 1$, este următoarea. Pornind de la $\{V_1, x_i > x_{i+1}, i = \overline{1, n-1}\}$ şi folosind formula (12) sau, respectiv, cea (13) şi un algoritm iterativ special, se poate obţine setul de valori V_i, $i = \overline{1, n}$ şi, deci, repartizarea, care corespunde cerinţei (1) sau, respectiv, celei (2) a Definiţiei 3.

Garantează soluţia (dacă aceasta există), indiferent de valoarea n, algoritmul A2, descris în altă lucrare (în curs de publicare), dar, cu regret, acesta este relativ laborios şi, de aceea, este oportun de folosit doar cu o aplicaţie informatică respectivă. Dar, pentru valorile mici ale lui n, soluţia poate fi obţinută, de obicei, folosind algoritmul A1, mai simplu, descris mai jos.

Fie $V_{i\,\min}$ este valoarea minimă, iar $V_{i\,\max}$ este valoarea maximă a V_i, adică $V_{i\,\min} \leq V_i \leq V_{i\,\max}$. Ţinând cont că, iniţial, sunt cunoscute doar valorile $\{V_1, x_i > x_{i+1}, i = \overline{1, n-1}\}$ şi că aceste valori sunt numere întregi, în algoritmul A1, sunt folosite cerinţele mai simple:

Thus, one has $\lfloor V_i\, x_{i+1}/x_i\rfloor + 1 < V_i$, that is $\lfloor(x_{i+1} - x_i)V_i/x_i\rfloor + 1 < 0$ or $(x_i - x_{i+1})V_i/x_i > \lfloor(x_i - x_{i+1})V_i/x_i\rfloor > 1$, from where relations (16) result. ▼

Also, based on $x_i/V_i < x_{i+1}/V_{i+1}$, one has $V_{i+1} < V_i\, x_{i+1}/x_i$ and, taking into account the relation $V_i > V_{i+1}$, the maximal possible V_{i+1} value ($V_{i+1\ \max}$) is determined as $V_{i+1\ \max} = \lceil V_i\, x_{i+1}/x_i\rceil - 1$. Thus, one has $\lceil V_i\, x_{i+1}/x_i\rceil - 1 < V_i$, that is $\lceil(x_{i+1} - x_i)V_i/x_i\rceil - 1 < 0$ or $(x_i - x_{i+1})V_i/x_i > \lceil(x_i - x_{i+1})V_i/x_i\rceil > -1$ that always occur. ■

The applied APP method is another factor of influence, when determining apportionments that totally favours large or small beneficiaries. From the multitude of APP methods, there some linear divisor methods are examined. It is well known that d'Hondt method ($c = 1$) strongly favours large beneficiaries [4, 7]. At the same time, the lower is the value of c, the greater is the grade of favouring of large beneficiaries by the respective linear divisor method [8]. That is why below only cases with $c \geq 1$ are considered.

One of the ways of determining apportionments which totally favor large/small beneficiaries, for linear divisor methods with $c \geq 1$, is the following. Starting from $\{V_1, x_i > x_{i+1}, i = \overline{1, n-1}\}$ values and using formula (12) or, respectively, the (13) one and a special iterative algorithm, one can obtain the set of V_i, $i = \overline{1, n}$ values and, thus, the apportionment that corresponds to requirement (1) or, respectively, to the (2) one of Definition 3.

It guarantees the solution (if it exists), regardless of the value of n, the A2 algorithm, described in another paper (currently being published), but, unfortunately, it is relatively laborious and, therefore, is appropriate to use it only with a respective computer application. But for small values of n, the solution can be usually obtained, too, using the simpler described below A1 algorithm.

Let $V_{i\ \min}$ is the minimal value and $V_{i\ \max}$ is the maximal value of V_i, that is $V_{i\ \min} \leq V_i \leq V_{i\ \max}$. Taking into account that initially only the $\{V_1, x_i > x_{i+1}, i = \overline{1, n-1}\}$ values are known and that this values are integers, in algorithm A1 the simpler requirements:

$$V_{i\,\min} = \left\lfloor V_{i-1}\frac{x_i}{x_{i-1}}\right\rfloor + 1 \leq V_i \leq \left\lceil \min_{j=\overline{1,i-1}}\left\{V_j\frac{cx_i + 1}{c(x_j - 1) + 1}\right\}\right\rceil - 1 = V_{i\,\max}, i = \overline{2, n} \qquad (17)$$

în locul celor (12) şi, respectiv, cerinţele mai simple:

instead of the (12) ones and, respectively, the simpler requirements:

$$V_{i\,\min} = \left\lfloor \max_{j=\overline{1,i-1}} \left\{ V_j \frac{c(x_i - 1) + 1}{cx_j + 1} \right\} \right\rfloor + 1 \le V_i \le \left\lceil V_{i-1} \frac{x_i}{x_{i-1}} \right\rceil - 1 = V_{i\,\max}, i = \overline{2,n} \tag{18}$$

în locul celor (13).

Evident, cerinţele (17) sunt mai puţin stricte decât cele (12), iar cerinţele (18) sunt mai puţin stricte decât cele (13). De aceea, algoritmul A1 nu garantează obţinerea soluţiei scontate.

Folosind cerinţele (17) sau, respectiv, cele (18), trebuie să se atribuie lui V_i o valoare în intervalul $[V_{i\,\min}; V_{i\,\max}]$, adică $V_i = V_{i\,\min} + \lfloor g(V_{i\,\max} - V_{i\,\min}) \rfloor$, $0 \le g \le 1$. Desigur, dacă $V_{i\,\min} > V_{i\,\max}$, atunci soluţia nu există. De asemenea, calculele pot începe cu $g = 0{,}5$. Pe de altă parte, dacă n este mic, atunci poate fi oportun să se utilizeze o valoare a lui g apropiată de 0 (de exemplu, $V_i = V_{i\,\min}$ sau $V_i = V_{i\,\min} + 1$), iar dacă n este mare — o valoare a lui g apropiată de 1 (de exemplu, $V_i = V_{i\,\max}$ sau $V_i = V_{i\,\max} - 1$).

Algoritmul A1. Date iniţiale: V_1, $x_i > x_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$, $g = 0.5$.

1. $i = 2$.
2. Determinarea $V_{i\,\min}$ şi $V_{i\,\max}$ conform (17), în cazul favorizării totale a beneficiarilor mari, sau conform (18), în cazul favorizării totale a beneficiarilor mici.
3. Dacă $V_{i\,\min} > V_{i\,\max}$, atunci soluţia nu există. Stop.
4. Atribuirea lui V_i a unei valori în intervalul $[V_{i\,\min}, V_{i\,\max}]$, de exemplu, $V_i = V_{i\,\min} + \lfloor g(V_{i\,\max} - V_{i\,\min}) \rfloor$. Desigur, în locul lui g, poate fi folosită o altă abordare rezonabilă.
5. Dacă $i < n$, atunci $i := i + 1$ şi trecere la Pasul 2.
6. Verificarea valorilor obţinute ale V_i, $i = \overline{1,n}$ prin aplicarea metodei PRP respective. Dacă repartizarea obţinută nu coincide cu cea iniţială, atunci modificarea valorii lui g şi trecerea la Pasul 1.
7. Valorile V_i, $i = \overline{1,n}$ sunt determinate. Stop.

De remarcat faptul că se poate întâmpla să nu fie posibil de găsit o valoare a lui g la Pasul 6, care ar conduce la obţinerea soluţiei scontate, inclusiv din cauza că cerinţele (17) sunt mai puţin stricte decât cele (12) sau, respectiv, cerinţele (18) sunt mai puţin stricte decât cele (13). De asemenea, se poate utiliza o valoare diferită a lui g pentru fiecare V_i, $i = \overline{1,n}$. Dar, după cum arată experienţa aplicării mai multor abordări, o modalitate bună este de a utiliza două iteraţii - una cu $g = 0$ şi alta cu $g = 1$, iar ulterior, de atribuit $V_i = [V_i(g = 0) + V_i(g = 1)]/2$. Pentru

instead of the (13) ones are used.

Evidently, requirements (17) are less strong than the (12) ones, and requirements (18) are less strong than the (13) ones. That's why algorithm A1 doesn't guarantee the obvious solution.

Using requirements (17) or, respectively, the (18) ones , one has to assign a value to V_i in the range $[V_{i\,\min}; V_{i\,\max}]$, that is $V_i = V_{i\,\min} + \lfloor g(V_{i\,\max} - V_{i\,\min}) \rfloor$, $0 \le g \le 1$. Of course, if $V_{i\,\min} > V_{i\,\max}$, then the solution does not exist. Also, calculations can begin with $g = 0.5$. On the other hand, if n is small it can be opportune to use a value of g close to 0 (for example, $V_i = V_{i\,\min}$ or $V_i = V_{i\,\min} + 1$), and if n is large – a value of g close to 1 (for example $V_i = V_{i\,\max}$ or $V_i = V_{i\,\max} - 1$).

Algorithm A1. Initial data are: V_1, $x_i > x_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$, $g = 0.5$.

1. $i = 2$.
2. Determining $V_{i\,\min}$ and $V_{i\,\max}$ by equalities (17), in case of totally favouring of large beneficiaries, or by the (18) ones, in case of totally favouring of small beneficiaries.
3. If $V_{i\,\min} > V_{i\,\max}$, then the solution doesn't exist. Stop.
4. Assigning to V_i a value in the range $[V_{i\,\min}, V_{i\,\max}]$, for example, $V_i = V_{i\,\min} + \lfloor g(V_{i\,\max} - V_{i\,\min}) \rfloor$. Of course, instead of g, it can be used another reasonable approach.
5. If $i < n$, then $i := i + 1$ and go to Step 2.
6. Checking the obtained values of V_i, $i = \overline{1,n}$ by applying the respective APP method. If the obtained apportionment does not coincide with the initial one, then to respectively modify the value of g and go to Step 1.
7. The values of V_i, $i = \overline{1,n}$ were found. Stop.

It should be noted that it may not be possible to find a value of g at Step 6, which would lead to the expected solution, including because the requirements (17) are less stringent than those (12) or, respectively, the requirements (18) are less stringent than those (13). Also, one can use a different value of g for each V_i, $i = \overline{1,n}$. But, as the experience of applying several approaches shows, a good way is to use two iterations – one with $g = 0$ and another with $g = 1$, and subsequently to be assigned $V_i = [V_i(g = 0) + V_i(g = 1)]/2$. For small values valori mici ale n, algoritmul A1 poate fi uşor implementat, folosind un procesor tabelar, de exemplu, Microsoft Excel

Folosind algoritmul A1, vom examina două studii de caz privind favorizarea totală a beneficiarilor mari de către metodele d'Hondt (Exemplul 1) şi Sainte-Laguë (Exemplul 2) şi un studiu de caz privind favorizarea totală a beneficiarilor mici de către metoda Divizor liniar dependent – DLD (Exemplul 3).

Pentru *metoda d'Hondt* (c = 1), relaţia (12) ia forma:

of n, the algorithm A1 can be easy implemented using a table processor, for example, Microsoft Excel.

Using algorithm A1, let's examine two case studies of total favouring of large beneficiaries by d'Hondt (Example 1) and Sainte-Laguë (Example 2) methods and one case study of total favouring of small beneficiaries by the Dependent linear divisor method (Example 3).

For *d'Hondt method* (c = 1), relation (12) takes the form**:**

$$\max\left\{V_{i-1}\frac{x_i}{x_{i-1}},\ \max_{j=\overline{i+1,n}}\left[V_j\frac{x_i}{x_j+1}\right]\right\} < V_i < \min\left\{V_{i+1}\frac{x_i}{x_{i+1}};\ \min_{j=\overline{1,i-1}}\left[V_j\frac{x_i+1}{x_j}\right]\right\}, i=\overline{1,n}.$$

Iar relaţia (17) – forma

And relation (17) – the form

$$V_{i\,\min} = \left\lfloor V_{i-1}\frac{x_i}{x_{i-1}}\right\rfloor + 1 \le V_i \le \left\lceil \min_{j=\overline{1,i-1}}\left\{V_j\frac{x_i+1}{x_j}\right\}\right\rceil - 1 = V_{i\,\max}, i=\overline{2,n} \qquad (19)$$

Exemplul 1, privind o repartizare a metodei d'Hondt, conformă cerinţei (1). Fie se folosesc datele iniţiale: M = 27, n = 4, V_1 = 2000, x_1 = 10, x_2 = 8, x_3 = 5, x_4 = 4. Conform (19), avem:

$V_{2\max} = \lceil V_1(x_2 + 1)/x_1\rceil - 1 = 1799$ şi $V_{2\min} = \lfloor V_1x_2/x_1\rfloor + 1 = 1601$. Astfel, avem $V_2 \in [1601; 1799]$. Fie $V_2 = 1700$ ($g_2 = 0.5$);

$V_{3\max} = \lceil\min\{V_1(x_3 + 1)/x_1;\ V_2(x_3 + 1)/x_2\}\rceil - 1 = 1199$ şi $V_{3\min} = \lfloor V_3x_4/x_3\rfloor + 1 = 1063$. Astfel, avem $V_3 \in [1063; 1199]$. Fie $V_3 = 1100$ ($g \approx 0.272$);

$V_{4\max} = \lceil\min\{V_1(x_4 + 1)/x_1;\ V_2(x_4 + 1)/x_2;\ V_3(x_4 + 1)/x_3\}\rceil - 1 = 999$ şi $V_{4\min} = \lfloor V_3x_4/x_3\rfloor + 1 = 881$. Astfel, avem $V_3 \in [881; 999]$. Fie $V_4 = 900$ ($g \approx 0.161$).

Aplicând metoda d'Hondt asupra datelor iniţiale completate, avem: $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 5700$. Atunci $Q = V/M = 211.(1)$ şi $\Delta M = 1$. Celelalte calcule privind repartizarea sunt prezentate în tabelul 1.

Example 1 of a d'Hondt method apportionment, compliant with requirement (1). Either the initial data is used: M = 27, n = 4, V_1 = 2000, x_1 = 10, x_2 = 8, x_3 = 5, x_4 = 4. According to (19), one has:

$V_{2\max} = \lceil V_1(x_2 + 1)/x_1\rceil - 1 = 1799$ and $V_{2\min} = \lfloor V_1x_2/x_1\rfloor + 1 = 1601$. So, one has $V_2 \in [1601; 1799]$. Let it be $V_2 = 1700$ ($g_2 = 0.5$);

$V_{3\max} = \lceil\min\{V_1(x_3 + 1)/x_1;\ V_2(x_3 + 1)/x_2\}\rceil - 1 = 1199$ and $V_{3\min} = \lfloor V_3x_4/x_3\rfloor + 1 = 1063$. So, one has $V_3 \in [1063; 1199]$. Let it be $V_3 = 1100$ ($g \approx 0.272$);

$V_{4\max} = \lceil\min\{V_1(x_4 + 1)/x_1;\ V_2(x_4 + 1)/x_2;\ V_3(x_4 + 1)/x_3\}\rceil - 1 = 999$ and $V_{4\min} = \lfloor V_3x_4/x_3\rfloor + 1 = 881$. So, one has $V_3 \in [881; 999]$. Let it be $V_4 = 900$ ($g \approx 0.161$).

Applying d'Hondt method for the completed initial data, one has: $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 5700$. Then $Q = V/M = 211.(1)$ and $\Delta M = 1$. The other calculations for the apportionment are shown in table 1.

Tabelul 1/ Table 1

Calculele privind repartizarea la Exemplul 1/ Calculations for the apportionment to Example 1

i	V_i	a_i	$V_i/(a_i+1)$	$V_i/(a_i+2)$	Δx_i	x_i	x_i/V_i
1	2000	9	200	181.(81)	1	10	0.0050
2	1700	8	188.(8)	170	0	8	0.0047
3	1100	5	183.(3)	157.1	0	5	0.0045
4	900	4	180	150	0	4	0.0044

Sursa: *elaborat de autor /* ***Source:*** *developed by the author*

Conform datelor din ultima coloană a tabelului 1, repartizarea respectă cerinţa (1) şi, conform datelor din penultima coloană, aceasta coincide cu cea iniţială. Deci, repartizarea metodei d'Hondt obţinută îi favorizează total pe beneficiarii mari.

Pentru *metoda Sainte-Laguë* (c = 2), relaţia (12) ia forma

According to data in the last column of table 1, the apportionment complies with requirement (1) and, according to data in the penultimate column, it coincides with the initial one. So, the obtained d'Hondt method apportionment totally favours large beneficiaries.

For *Sainte-Laguë method* (c = 2), relation (12) takes the form

$$\max\left\{V_{i-1}\frac{x_i}{x_{i-1}}, \max_{j=\overline{i+1,n}}\left[V_j\frac{2(x_i-1)+1}{2x_j+1}\right]\right\} < V_i < \min\left\{V_{i+1}\frac{x_i}{x_{i+1}}; \min_{j=\overline{1,i-1}}\left[V_j\frac{2x_i+1}{2(x_j-1)+1}\right]\right\}, i=\overline{1,n},$$

iar relaţia (17) – forma

and relation (17) – the form

$$V_{i\,\min} = \left\lfloor V_{i-1}\frac{x_i}{x_{i-1}}\right\rfloor + 1 \le V_i \le \left\lceil \min_{j=\overline{1,i-1}}\left\{V_j\frac{2x_i+1}{2(x_j-1)+1}\right\}\right\rceil - 1 = V_{i\,\max}, i=\overline{2,n}. \quad (20)$$

Exemplul 2, privind o repartizare a metodei Sainte-Laguë, conformă cerinţei (1). Fie se folosesc datele iniţiale: $M = 25$, $n = 4$, $V_1 = 2000$, $x_1 = 9$, $x_2 = 7$, $x_3 = 5$, $x_4 = 4$. Conform (20), avem:

$V_{2\max} = \lceil V_1(2x_2 + 1)/[2(x_1 - 1) + 1]\rceil - 1 = 1764$ şi $V_{2\min} = \lfloor V_1x_2/x_1\rfloor + 1 = 1555$. Astfel, avem $V_2 \in [1555; 1764]$. Fie $V_2 = 1700$;

$V_{3\max} = \lceil\min\{V_1(2x_3 + 1)/[2(x_1 - 1) + 1]; V_2(2x_3 + 1)/[2(x_2 - 1) + 1]\}\rceil - 1 \approx 1294$ şi $V_{3\min} = V_3x_4/x_3 \approx 1214$. Astfel, $V_3 \in (1214; 1294)$. Fie $V_3 = 1250$;

$V_{4\max} = \lceil\min\{V_1(2x_4 + 1)/[2(x_1 - 1) + 1]; V_2(2x_4 + 1)/[2(x_2 - 1) + 1]; V_3(2x_4 + 1)/[2(x_3 - 1) + 1]\}\rceil - 1 \approx 1058$ şi $V_{4\min} = \lfloor V_3x_4/x_3\rfloor + 1 = 1001$. Astfel, $V_3 \in [1001; 1058]$. Fie $V_4 = 1030$.

Aplicând metoda Sainte-Laguë asupra datelor iniţiale completate, avem: $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 5980$. Atunci $Q = V/M = 239.2$ şi $\Delta M = 1$. Celelalte calcule privind repartizarea sunt prezentate în tabelul 2.

Example 2 of a Sainte-Laguë method apportionment, compliant with requirement (1). Either the initial data is used: $M = 25$, $n = 4$, $V_1 = 2000$, $x_1 = 9$, $x_2 = 7$, $x_3 = 5$, $x_4 = 4$. According to (20), we have:

$V_{2\max} = \lceil V_1(2x_2 + 1)/[2(x_1 - 1) + 1]\rceil - 1 = 1764$ and $V_{2\min} = \lfloor V_1x_2/x_1\rfloor + 1 = 1555$. So, one has $V_2 \in [1555; 1764]$. Let it be $V_2 = 1700$;

$V_{3\max} = \lceil\min\{V_1(2x_3 + 1)/[2(x_1 - 1) + 1]; V_2(2x_3 + 1)/[2(x_2 - 1) + 1]\}\rceil - 1 \approx 1294$ and $V_{3\min} = V_3x_4/x_3 \approx 1214$. So, $V_3 \in (1214; 1294)$. Let it be $V_3 = 1250$;

$V_{4\max} = \lceil\min\{V_1(2x_4 + 1)/[2(x_1 - 1) + 1]; V_2(2x_4 + 1)/[2(x_2 - 1) + 1]; V_3(2x_4 + 1)/[2(x_3 - 1) + 1]\}\rceil - 1 \approx 1058$ and $V_{4\min} = \lfloor V_3x_4/x_3\rfloor + 1 = 1001$. So, $V_3 \in [1001; 1058]$. Let it be $V_4 = 1030$.

Applying the Sainte-Laguë method for the completed initial data, one has: $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 5980$. Then $Q = V/M = 239.2$ and $\Delta M = 1$. The other calculations for the apportionment are shown in table 2.

Tabelul 2/ Table 2

Calculele privind repartizarea la Exemplul 2/
Calculations for the apportionment to Example 2

i	V_i	a_i	$V_i/[2(a_i - 1) + 1]$	$V_i/(2a_i + 1)$	$V_i/[2(a_i + 1) + 1]$	Δx_i	x_i	x_i/V_i
1	2000	8	133.(3)	117.6	105.3	1	9	0.0045
2	1700	7	130.8	113.(3)	100	0	7	0.0041
3	1250	5	138.9	113.6	96.2	0	5	0.0040
4	1030	4	147.1	114.(4)	93.6	0	4	0.0039

Sursa: *elaborat de autor /* ***Source:*** *developed by the author*

Conform datelor din penultima coloană a tabelului 2, repartizarea metodei Sainte-Laguë coincide cu cea iniţială. În plus, datele din ultima coloană a tabelului 2 confirmă că repartizarea este conformă cerinţei (1). Deci, aceasta îi favorizează total pe beneficiarii mari. Astfel, chiar şi pentru metoda Sainte-Laguë, care este neutră (imparţială) în privinţa favorizării beneficiarilor [8], pot fi repartizări care îi favorizează total pe beneficiarii mari.

Pentru metoda DLD (c = max{2, n – 1) [8], relaţia (13) la $n > 3$ ia forma

According to data in penultimate column of table 2, the obtained according to the Sainte-Laguë method apportionment coincide with the initial one. Moreover, the data in last column of table 2 confirm that the apportionment is compliant with requirement (1). Thus, it totally favours large beneficiaries. So, even for the Sainte-Laguë method, which is neutral (unbiased) in favouring of beneficiaries [8], they can be particular apportionments which totally favours large beneficiaries.

For the DLD method (c = max{2, n – 1) [8], relation (13) at $n > 3$ takes the form

$$\max\left\{V_{i+1}\frac{x_i}{x_{i+1}}, \max_{j=\overline{1,i-1}}\left[V_j\frac{(n-1)(x_i-1)+1}{(n-1)x_j+1}\right]\right\} < V_i$$
$$< \min\left\{V_{i-1}\frac{x_i}{x_{i-1}}; \min_{j=\overline{i+1,n}}\left[V_j\frac{(n-1)x_i+1}{(n-1)(x_j-1)+1}\right]\right\}, i=\overline{1,n},$$

iar relaţia (18) – forma

and relation (18) – the form

$$V_{i\,\min} = \left\lfloor \max_{j=\overline{1,i-1}}\left\{V_j\frac{(n-1)(x_i-1)+1}{(n-1)x_j+1}\right\}\right\rfloor + 1 \le V_i \le \left\lceil V_{i-1}\frac{x_i}{x_{i-1}}\right\rceil - 1 = V_{i\,\max}, i=\overline{2,n}. \quad (21)$$

Exemplul 3, privind o repartizare a metodei Divizor linear dependent, conformă cerinţei (2). Fie se folosesc datele iniţiale: M = 33, n = 5, V_1 = 2000, x_1 = 10, x_2 = 9, x_3 = 8, x_4 = 4, x_5 = 2; de asemenea, la prima iteraţie, se foloseşte g = 0, la a doua iteraţie, se foloseşte g = 1, iar $V_i = [V_i(g{=}0) + V_i(g{=}1)]/2$, $i=\overline{2,n}$.

Rezultatele calculelor privind valorile $V_{i\ \min}$ şi $V_{i\ \max}$, $i=\overline{2,n}$, efectuate conform (21), sunt sistematizate în tabelul 3. Aplicând metoda DLD asupra datelor iniţiale completate, avem: $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 6247$. Atunci $Q = V/M \approx 189.3$ şi $\Delta M = 3$. Celelalte calcule privind repartizarea sunt prezentate în tabelul 3.

Example 3 of a Dependent linear divisor method apportionment, compliant with requirement (2). Either the initial data is used: M = 33, n = 5, V_1 = 2000, x_1 = 10, x_2 = 9, x_3 = 8, x_4 = 4, x_5 = 2; also, for the first iteration is used g = 0, for the second iteration is used g = 1, and $V_i = [V_i(g{=}0) + V_i(g{=}1)]/2$, $i=\overline{2,n}$.

The results of calculations of $V_{i\ \min}$ and $V_{i\ \max}$, $i=\overline{2,n}$ values, performed according to (21), are systemized in table 3. Applying the DLD method for the completed initial data, one has: $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 6247$. Then $Q = V/M \approx 189.3$ and $\Delta M = 3$. The other calculations for the apportionment are shown in table 3.

Tabelul 3/ Table 3

Calculele privind repartizarea la Exemplul 3/
Calculations for the apportionment to Example 3

i	$V_i(g{=}0)$	$V_i(g{=}1)$	V_i	a_i	$V_i/(4(a_i-1)+1)$	$V_i/(4a_i+1)$	Δx_i	x_i	x_i/V_i
1	2000	2000	2000	10	54.1	48.8	0	10	0.00500
2	1610	1799	1704	9	51.6	46.1	0	9	0.00528
3	1415	1598	1506	7	60.2	51.9	1	8	0.00531
4	635	798	716	3	79.6	55.1	1	4	0.00559
5	244	398	321	1	321	64.2	1	2	0.00623

Sursa: *elaborat de autor /* ***Source:*** *developed by the author*

Conform datelor din ultima coloană a tabelului 3, repartizarea respectă cerinţa (2) şi, conform datelor din penultima coloană, aceasta coincide cu cea iniţială. Deci, repartizarea metodei DLD obţinută îi favorizează total pe beneficiarii mici.

5. Concluzii

Pentru a fi utilizate la generarea repartizărilor, au fost determinate:

- cerinţele de conformitate a repartizărilor cu soluţia metodelor cu divizor liniar;
- condiţiile de conformitate a metodelor cu divizor liniar, la $c > 0$ şi la $c \geq 1$, cu cerinţele de favorizare totală a beneficiarilor mari sau a celor mici;
- condiţiile menţionate mai sus au fost concretizate pentru $x_i > x_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$.

Aşa cum era de aşteptat, există cazuri în care metodele cu divizor liniar nu sunt conforme cu cerinţele de favorizare totală a beneficiarilor mari sau, dimpotrivă, a celor mici.

Pentru a determina repartizările metodelor cu divizor liniar, ce îi favorizează total pe beneficiari, a fost elaborat algoritmul A1. Chiar dacă algoritmul A1 nu garantează soluţia, acesta este simplu – pentru valori mici ale n, el poate fi uşor implementat, folosind un procesor tabelar (de exemplu, Microsoft Excel). Folosind A1, au fost efectuate calcule pentru trei exemple:

- Exemplul 1, privind o repartizare a metodei d'Hondt la $n = 4$, ce îi favorizează total pe beneficiarii mari;
- Exemplul 2, privind o repartizare a metodei Sainte-Laguë la $n = 4$, ce îi favorizează total pe beneficiarii mari;
- Exemplul 3, privind o repartizare a metodei Divizor liniar dependent la $n = 5$, ce îi favorizează total pe beneficiarii mici.

Rezultatele obţinute confirmă oportunitatea utilizării algoritmului A1, la valori mici ale n, pentru determinarea repartizărilor obținute la aplicarea metodelor cu divizor linear, ce îi favorizează total pe beneficiarii mari sau, dimpotrivă, pe cei mici.

According to data in the last column of table 3, the apportionment complies with requirement (2) and, according to data in the penultimate column, it coincides with the initial one. So, the obtained DLD method apportionment totally favours small beneficiaries.

5. Conclusions

In order to be used when generating apportionments, were determined:

- the requirements of apportionments compliance with linear divisor methods' solution;
- the conditions of linear divisor methods apportionments compliance, at $c > 0$ and $c \geq 1$, with the requirements of total favouring large or small beneficiaries;
- the mentioned above conditions where concretized for $x_i > x_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$.

As expected, there exist cases when linear divisor methods are not compliant with the requirements of total favouring of large beneficiaries or, on the contrary, of the small ones.

In order to determine linear divisor methods' apportionments which totally favours beneficiaries, the algorithm A1 was elaborated. Even if the algorithm A1 does not guarantee the solution, it is simple – for small values of n, it can be easily implemented using a table processor (for example, Microsoft Excel). Using A1, calculations for three examples were performed:

- Example 1 of a d'Hondt method's apportionment at $n = 4$ which totally favours large beneficiaries;
- Example 2 of a Sainte-Laguë method's apportionment at $n = 4$ which totally favours large beneficiaries;
- Example 3 of a Dependent linear divisor method's apportionment at $n = 5$ which totally favours small beneficiaries.

The obtained results confirm the opportunity of using the algorithm A1, at small values of n, for the determining of linear divisor method's apportionments which totally favours large beneficiaries or, on the contrary, the small ones.

Bibliografie/Bibliography:

1. BALINSKI, M.L.; YOUNG, H.P. *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. 2nd ed. Washington, DC: Brookings Institution Press, 2001.
2. KOHLER, U.; ZEH, J. Apportionment methods. *The Stata Journal*, 2012, 12(3), pp. 375–392.

3. NIEMEYER, H.F.; NIEMEYER, A.C. Apportionment Methods. *Math. Social Sci.*, Vol. 56, Issue 2 (2008), pp. 240-253. University of Western Australia, arXiv: 1510.07528v1 [math.HO], Oct. 27, 2015, pp. 1-24. (https://arxiv.org/pdf/1510.07528.pdf, accessed 25.07.2020).
4. GALLAGHER, M. Proportionality, Disproportionality and Electoral Systems. *Electoral Studies*, 1991, 10(1), pp. 33-51.
5. KARPOV, A. Measurement of disproportionality in proportional representation. *Mathematical and Computer Modeling*, 2008, 48, pp. 1421-1438.
6. D'HONDT, V. *La Répresentation Proportionnelles des Partis par un Electeur*. Ghent, 1878.
7. SORESCU, A.; PÂRVULESCU, C. and al. *Electoral systems*. Bucharest: Pro Democratia, 2006. – 54 p. (Romanian).
8. BOLUN, I. Favoring parties by General Linear Divisor Method. *Economica*, nr.1(95), 2016, pp. 109-127.
9. HUNTINGTON, E. A new method of apportionment of representatives. *Quart. Publ. Amer. Stat. Assoc*, 1921, 17, pp. 859-1970.
10. TANNENBAUM, P. *Excursions in Modern Mathematics*, Seventh Edition. Pearson, 2008. – 704 p.
11. MARSHALL, A.; OLKIN, I.; PUKELSHEIM, F. A majorization comparison of apportionment methods in proportional representation. *Social Choice Welfare* 19, 885-900 (2002). (https://doi.org/10.1007/s003550200164, accessed 25.07.2020).
12. BOLUN, I. A criterion for estimating the favoring of beneficiaries in apportionments. *Proceedings of Workshop on Intelligent Informatition Systems WIIS2020*, December 04-05, 2020. Chisinau: IMI, 2020. – pp. 33-41.
13. HARE, T. *The Election of Representatives, Parliamentary and Municipal*. London, 1859.
14. SAINTE-LAGUË, A. La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure,* 1910, 3:27, pp. 529-542.
15. BOLUN, I. Total favoring in proportional apportionments. *Journal of Social Sciences*, vol. X, no.1, 2021.