Relaxarea semidefinită pentru problema echilibrării liniilor de asamblare

Vasile Moraru
Universitatea Tehnică a Moldovei
bd. Ştefan cel Mare, 168, MD-2004, Moldova, Chişinău
moraru@mail.utm.md

Sergiu Zaporojan
Universitatea Tehnică a Moldovei
bd. Ştefan cel Mare, 168, MD-2004, Moldova, Chişinău
zaporojan_s@yahoo.com

REZUMAT

Suportul decizional în organizarea optimă a activităţii unei întreprinderi are la bază anumite modele matematice, inclusiv de optimizare. In această lucrare se consideră problema echilibrării liniilor de asamblare cu numele cunoscut în literatura de specialitate de **SALBP** (*Simple Assembly Line Balancing Problem*). Modelul matematic este o problemă de optimizare combinatorială şi aparţine clasei **NP**-dificile. Problema considerată se transformă într-o problemă de programare pătratică, ulterior reformulând-o ca un program semidefinit.

Cuvinte cheie

Modelare SALBP, programare booleană, relaxare semidefinită.

Clasificare ACM

H5.2. Information interfaces and presentation (e.g., HCI): Miscellaneous.

INTRODUCERE

În această lume în continuă schimbare, esenţială pentru succesul în afaceri este organizarea optimă a activităţiii, acordată priorităţilor şi rigorilor externe. Desigur, resursele umane, financiare, materiale şi informaţionale disponibile contează enorm în lansarea sau continuarea unei afaceri. În primul rând, însă, trebuie considerată problema optimizării afacerii.

Termenul „afaceri”, în contextul acestei lucrări, este tratat ca tot ce implică realizarea afacerii: organizarea şi desfăşurarea proceselor şi a activităţilor aferente producţiei. Altfel spus afacerea este interpretată ca un proces de business, care cuprinde un şir de activităţi logic interconectate la nivelul unei întreprinderi.

Activităţile respective includ procese organizaţionale, economico-financiare, productive, comerciale şi, nu în ultimul rând, informaţionale. Ceea ce are importanţă în organizarea procesului de business este optimizarea activităţii întreprinderii, ţinând seama de cerinţele pieţei şi de puterea tehnologiilor actuale.

Activităţile menţionate sunt realizate de agenţi umani şi/sau maşini pentru a contribui la atingerea obiectivelor afacerii în cadrul întreprinderii. Deci, organizarea, respectiv optimizarea unui proces de business ţine de activităţi (sau operaţii), participanţi (agenţi umani şi/sau maşini) şi obiective ţintă (indicatori de performanţă).

În general, cerinţele de organizare optimă a activităţii întreprinderii sunt actuale şi se încadrează în ideea de reengineering. Această idee este centrată asupra tuturor proceselor la nivelul întreprinderii moderne.

Reengineering-ul este o reproiectare radicală a unui proces de business pentru a atinge o îmbunătăţire considerabilă a indicatorilor de performanţă (cost, calitate, productivitate, etc.). Ideea de reengineering este actuală, deoarece tehnologia informaţiei este în schimbare continuă. De aici şi posibilitatea de a se adapta rapid la cerinţele pieţei.

Suportul decizional în organizarea optimă a activităţii unei întreprinderi nu este întotdeauna posibil fără produse informatice care au la bază modele matematice de optimizare combinatorială. Este şi cazul problemei echilibrării liniilor de asamblare (fabricaţie).

NOŢIUNI GENERALE

Problema echilibrării liniilor de asamblare a cunoscut în ultimii ani o mare atenţie din partea cercetătorilor. Industria de asamblare ocupă un loc important în lumea economică modernă şi este o modalitate promiţătoare de echilibrare a liniilor de asamblare de a se adapta rapid la schimbările posibile. Echilibrarea liniilor de asamblare a fost formulată pentru prima oară în anul 1955 de către M. E. Salvenson [1]. Modelul matematic corespunzător este o problemă de optimizare discretă şi face parte din clasa problemelor **NP**-dificile [2].

Problema generală a echilibrării liniilor de asamblare poate fi definită în diferite moduri. Definiţia de bază a acestei probleme constă în următoarele: fiind dat un număr de staţii de lucru (*workstations*), cum se pot combina operaţiile individuale (*task*) executate la aceste staţii pentru a avea o distribuire uniformă a volumului de lucru care minimizează timpul inactiv sau numărul de staţii în condiţiile respectării constrângerilor de precedenţă (prioritate) pentru executarea operaţiilor.

Au fost propuse în literatura de specialitate mai multe tipuri ale problemei echilibrării liniilor de asamblare. În problemele de tipul I (cu denumirea **SALB–I**) se minimizează numărul necesar de staţii, menţinând un ciclu de timp dorit [3].

Problemele de tipul II (**SALB– II**) sunt inverse problemelor de tipul I: se minimizează timpul de ciclu cu un număr fix de staţii [3-5].

Versiunea cea mai generală este problema de tipul E (**SALB – E**) în care se minimizează atât timpul de ciclu cât şi numărul de staţii, corelându-le simultan [6].

Un alt tip de problemă este cel **SALB – F** în care se verifică dacă există sau nu o linie de echilibrare fezabilă pentru o combinaţie dată de durata ciclului şi numărului de staţii [3,6].

Mai sunt studiate probleme cu maşini şi/sau operaţii paralele (o staţie poate fi formată din mai multe maşini şi/sau diferite operaţii sunt efectuate simultan pe aceeaşi staţie de lucru), probleme cu linii în forma de **U** [7-8].

Aceste probleme sunt cercetate în următoarele ipoteze principale: timpul de realizare a operaţiilor este determinist; divizarea operaţiilor este interzisă; există constrângeri de precedenţă; toate operaţiile trebuie realizate; timpul de realizare a unei operaţii nu depinde de staţia la care se execută; staţiile sunt aranjate în serie; linia de asamblare este concepută pentru un produs unic şi are un singur mod de funcţionare; timpul ciclului sau numărul de staţii este fixat.

De-a lungul timpului au fost propuse diferite metode (euristice [9-11], exacte [4,6,12,13], stochastice [14]) de rezolvare a problemelor echilibrării liniilor de asamblare, majoritatea acestora fiind concentrate asupra celor două tipuri **SALB-I** şi **SALB-II.**

De exemplu, utilizarea produsului WinQSB oferă următoarele facilităţi: programare liniară şi în numere întregi, modelarea grafurilor, problema de transport, problema drumului minim, analiza drumului critic, teoria stocurilor, fire de aşteptare şi grafice de control al calităţii, echilibrarea liniilor de asamblare.

Suportul decizional pentru echilibrarea liniilor de asamblare este inclus în modulul *Facility Location*. Echilibrarea liniilor de asamblare presupune alocarea unor activităţi pe staţii de lucru secvenţiale, pe baza relaţiilor de precedenţă dintre activităţi. Obiectivul de bază este optimizarea încadrării în timp şi respectarea cerinţelor de producţie, utilizând un număr minim de staţii de lucru.

WinQSB oferă trei soluţii alternative în rezolvarea acestui tip de probleme:

- Euristice.
- Metodă de optimizare: căutarea „Best-Bud”.
- Generări aleatoare: COMSOAL (COmputer Method of Sequencing Operations for Assembly Lines).

Căutarea „Best-Bud” găseşte o soluţie optimă, însă acest lucru nu se întâmplă întotdeauna cu metodele euristice. Rezolvarea COMSOAL generează aleator un anumit număr de soluţii şi o alege pe cea mai bună. Procedura se încheie dacă s-a găsit o soluţie optimă. Dacă se alege rezolvarea cu ajutorul tehnicilor euristice, se va specifica o metodă de bază şi una alternativă din cele disponibile.

Dar aplicarea metodelor existente întâmpină dificultăţi în cazul rezolvării problemelor în dimensiuni mari, deoarece ele fac parte din clasa problemelor **NP-hard**. Din aceste considerente în lucrarea de faţă se propune relaxarea semidefinită a problemei cercetate. Pentru aceasta problema iniţială se transformă într-o problemă echivalentă de programare pătratică. Problema de programare pătratică poate fi redusă la o problemă de programare semidefinită. Soluţia problemei relaxate poate fi găsită într-un timp polinomial [16].

MODELUL MATEMATIC AL PROBLEMEI SALB-I

Fie o linie de asamblare formată din *n* staţii. La fiecare staţie se execută câte o operaţie de către o persoană sau un dispozitiv automat (robot) necesară pentru fabricarea unui produs. Pentru asamblarea produsului operaţiile trebuie făcute într-o ordine strictă. Notăm prin P_i mulţimea predecesorilor operaţiei *i*, fiecărei operaţii i se pune o listă de operaţii predecesoare imediate, adică

$$P_i = \{(u,v) : u \ precede \ elementul \ v\}.$$

Se cunoaşte rata *R* de producţie (numărul de elemente colectate pe unitate de timp) şi timpul t_i de procesare a operaţiei i. Numărul de staţii nu poate fi mai mai mic decât T/C, unde $T = \sum_{i=1}^{n} t_i$ este durata tuturor operaţiilor necesare, iar $C = 1/R$ este timpul total al ciclului liniei de asamblare. Se cere distribuirea operaţiilor la staţiile de lucru astfel încât numărul de locuri de muncă să fie minim, adică maximizarea numărului de locuri de muncă “goale” – staţii la care nu se execută nici o operaţie.

Introducem variabilele booleene x_{ij} şi y_i astfel încât $x_{ij} = 1$ dacă operaţia i se efectuează la staţia j şi $x_{ij} = 0$ în cazul în care aceasta se execută la o altă staţie; $y_i = 1$ dacă la staţia i se realizează una din operaţii şi $y_i = 0$ în caz contrar. Au fost propuse diferite formulări pentru problema **SALB-I**. Vom considera următorul model matematic:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \to \min \tag{1}$$

referitor la

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i = 1,2,\ldots,n \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_{ij} \le C, \forall j = 1,2,\ldots,n \tag{3}$$

$$x_{ik} \le \sum_{j=1}^{k} x_{sj}, \forall k = 1,2,\ldots,n, \quad \forall i = 1,2,\ldots,n, \forall s \in P_i \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} \le n(1 - y_k), \forall k = 1,2,\ldots,n \tag{5}$$

Restricţiile (2) garantează că fiecare operaţie va fi efectuată doar la o singură staţie de lucru, iar (3) – că durata ciclului trebuie să fie mai mare sau egală cu durata timpurilor de la toate staţiile. Condiţiile (4) impun relaţiile de precedenţă între operaţii. Dacă $x_{ik} = 0$ (operaţia *i* nu se execută la staţia k), atunci $\sum_{j=1}^{k} x_{ik}$ poate lua orice valoare 0 sau 1 şi (4) devine $\sum_{j=1}^{n} x_{sj} \geq 0$, adevărată întotdeauna şi nu reprezintă constrângere. Dacă $x_{ik} = 1$ atunci (4) este echivalentă cu (2). Restricţiile (5) semnifică următoarele: dacă $y_k = 0$, atunci $\sum_{i=1}^{n} x_{ik} \leq n$, relaţie care este satisfăcută întotdeauna. Astfel (1) dă numărul de locuri de muncă “goale”, adică a celor staţii pentru care $\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 0$, staţii la care nu se execută nici o operaţie.

Numărul de variabile este egal cu $n^2 + n$ şi poate fi prea mare pentru ca această problemă să poată fi rezolvată exact prin metode standard de optimizare. De aceea sunt utilizate metode aproximative cu ajutorul cărora pot fi găsite soluţii relativ “bune” într-un timp rezonabil.

RELAXAREA SEMIDEFINITĂ

Restricţiile $x_{ij} = 0 \vee 1, y_i = 0 \vee 1$ sunt echivalente cu

$$x_{ij}^2 - x_{ij} = 0, y_i^2 - y_i = 0, \forall i, j.$$

Asociem problemei (1)-(5) următoarea problemă de programare pătratică cu restricţii pătratice:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \rightarrow \min \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 = 1, \forall i \\
\sum_{i=1}^{n} t_i x_{ij}^2 \leq C, \forall j \\
x_{ik}^2 \leq \sum_{j=1}^{k} x_{sj}^2, \forall k, \forall i, \forall s \in P_i \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2 \leq n\left(1 - y_k^2\right), \forall k \\
x_{ij}^2 - x_{ij} = 0, y_i^2 - y_i = 0, \forall i, \forall j
\end{array}\right\} \quad (6)$$

Considerăm vectorii:

$$X_i = \left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}\right)^T, i = 1,2,\ldots,n,$$

$$\widetilde{X}_j = \left(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}\right)^T, j = 1,2,\ldots,n,$$

$$Y = \left(y_1 y_2 \ldots y_n\right)^T.$$

Simbolul “T” semnifică aici şi în continuare operaţia de transpunere, astfel toţi vectorii consideraţi sunt vectori coloană cu n componente. Atunci funcţia obiectiv a problemei (6) devine:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = Tr\left(YY^T\right),$$

unde $Tr\left(YY^T\right)$ este urma matricei

$$YY^T = \begin{pmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & \cdots & y_1 y_n \\ y_2 y_1 & y_2^2 & \cdots & y_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n y_1 & y_n y_2 & \cdots & y_n^2 \end{pmatrix},$$

adică suma elementelor de pe diagonala principală a matricei YY^T.

Mai notăm cu $diag(A)$ vectorul coloană, componentele căruia sunt elementele de pe diagonala principală a matricei A, iar prin D_t matricea diagonală:

$$D_t = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_n \end{pmatrix}.$$

Cu aceste notaţii problema (6) devine:

$$\left.\begin{array}{l}
Tr\left(YY^T\right) \rightarrow \min \\
Tr\left(X_i X_i^T\right) = 1, i = 1,2,\ldots,n, \\
Tr\left(D_t \widetilde{X}_j \widetilde{X}_j^T\right) \leq C, j = 1,2,\ldots,n, \\
Tr\left(\widetilde{X}_j \widetilde{X}_j^T\right) \leq n\left(1 - y_j\right), j = 1,2,\ldots,n, \\
diag\left(\widetilde{X}_j \widetilde{X}_j^T\right) \leq x_{s1}^2 + x_{s2}^2 + \ldots + x_{sk}^2, \\
i = 1,2,\ldots,n, \forall s \in P_i, \\
diag\left(X_i X_i^T\right) - X_i = 0, i = 1,2,\ldots,n, \\
diag\left(YY^T\right) - Y = 0, \\
rang\left(X_i X_i^T\right) = 1, i = 1,2,\ldots,n, \\
rang\left(\widetilde{X}_j \widetilde{X}_j^T\right) = 1, j = 1,2,\ldots,n, \\
rang\left(YY^T\right) = 1.
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Aici matricele

$$X_i X_i^T = \begin{pmatrix} x_{i1}^2 & x_{i1} x_{i2} & \cdots & x_{i1} x_{in} \\ x_{i1} x_{i2} & x_{i2}^2 & \cdots & x_{i2} x_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} x_{in} & x_{i2} x_{in} & \cdots & x_{in}^2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{X}_j \widetilde{X}_j^T = \begin{pmatrix} x_{1j}^2 & x_{1j} x_{2j} & \cdots & x_{1j} x_{nj} \\ x_{1j} x_{2j} & x_{2j}^2 & \cdots & x_{2j} x_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1j} x_{nj} & x_{2j} x_{nj} & \cdots & x_{nj}^2 \end{pmatrix}$$

sunt simetrice, de rang unu şi pozitiv semidefinite.

Renunţând în (7) la condiţiile

$$rang\left(X_i X_i^T\right) = rang\left(\widetilde{X}_j \widetilde{X}_j^T\right) = rang\left(YY^T\right) = 1,$$

care sunt neliniare, se ajunge la relaxarea semidefinită a problemei (6).

CONCLUZII

Problema relaxată este o problemă de programare semidefinită care reprezintă o extensie a programării liniare în spaţiul matricelor semidefinite $YY^T, X_i X_i^T, \widetilde{X}_j \widetilde{X}_j^T$ şi furnizează o margine inferioară pentru problema (6). Pentru rezolvarea numerică a problemelor de programare semidefinită au fost propuse diferite tehnici dintre care cele mai efective s-au arătat metodele de punct interior [15,16]. Există şi soft-uri specializate dedicate rezolvării problemelor de programare semidefinită [17].

Rezultatele obţinute se pretează la construirea sistemelor suport decizional în organizarea şi desfăşurarea optimă a proceselor şi a activităţilor aferente producţiei în cadrul unei întreprinderi. În acest caz, obiectivul reengineering-ului constă în asigurarea unui suport decizional operativ pentru echilibrarea liniilor de asamblare, astfel încât să fie menţinuţi sau chiar îmbunătăţiţi indicatorii de cost şi productivitate, în condiţiile unor schimbări operative (sau complexe) în procesul de fabricaţie.

REFERINŢE

1. Salvenson M.E. The Assembly Line Balancing Problem. Journal of Industrial Engineering, 1955, Vol. 6, No. 4, pp. 18-25.
2. Bhattachaje T.K., Sahn S. Complexity of Single Model Assembly Line Balancing Problems. Engineering Cost and Production Economics, 1990, 18, pp. 203-214
3. School A. Balancing and Sequencing of Assembly Lines (series: Contribuitions to Management Science). Physica-Verlag Heidelberg, 2nd edition, 1999, 318 p.
4. Baybars I. A Survey of Exact Algorithms for the Simple Assembly Line Balancing Problem. Management Science, 1986, Vol. 32, No. 8, pp. 909-932. http://www.jstor.org/stable/2631657
5. Mastor A.A. An Experimental investigation and Comparative Evaluation of Production Line Balancing Techniques. Management Science, 1970, Vol. 16, pp. 728-745.
6. School A., Becker C. State of the Art Exact and Heuristic Solution Procedures for Simple Assembly Line Balancing. European Journal of Operational Research, 2006, Vol. 168, No. 3, pp. 666-693.
7. Gokcen H., Agpak K., Benzer R. Balancing of Parallel Assembly Lines. Production economics, 2006, Vol. 103, issue 2, pp. 600-609.
8. Urban Timothy L. Optimal Balancing of U-Shaped Assembly Lines. Management Science, May, 1998, Vol. 44, No. 5, pp. 738-741.
9. Tonge F.M. Assembly Line Balancing Using PROBABILISTIC Combinations of Heuristic. Management Science, 1965, Vol. 11, No. 7, pp. 727-735.
10. Arcus A.L. COMSOAL a Computer Method of Sequencing Operations for Assembly Lines. The International Journal of Production Research, 1996, Vol.4, No. 4, pp. 259-277.
11. School A., Voß S. Simple Assembly Line Balancing – Heuristic Approaches. Journal of Heuristics, 1997, Vol. 2, No. 3, pp.217-244.
12. Erel E., Sarin S.C. A Survey of the Assembly Line Balancing Procedures. Production Planning and Control, 1998, Vol. 9, No. 5, pp. 414-434.
13. Flesyar V., Hindi K.S. An Enumerative Heuristic and Reduction Method for Assembly Line balancing Problem. European Journal of Operational Research, 2003, Vol.145, pp. 606-620.
14. Bhattacharje T.K., Sahu S. A Critique of Some Current Assembly Line Balancing Techniques. International Journal of Operations and Production Management, 1987, Vol. 7, No. 6, pp. 32-43.
15. Andrei N. Programare semidefinită. MatrixRom, Bucureşti, 2001.
16. ***Interior Point Algorithms. http://www-user.tu-chemnitz.de/~helmberg/sdp_ip.html
17. ***Software.http://www-user.tu-chemnitz.de/~helmberg/semidef.htm