О ДВУКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ КВАДРАТИЧНОГО САМОСОПРЯЖЕННОГО ПУЧКА

Автор:Ион ГОРЮК

Технический Университет Молдовы

Абстракт: Приводится новое доказательство теоремы о двукратной полноте системы собственных и присоединенных векторов самосопряженного квадратичного пучка типа М. В. Келдыша.

Ключевые слова. Оператор, пучок операторов, корневые вектора, собственные и присоединенные вектора.

1. Пусть H- гильбертово пространство и σ_∞ - множество всехкомпактных операторов, действующих в H.

Обозначим через σ_p, $p>0\left(\sigma_\omega\right)$ множества всех операторов $A\in\sigma_\infty$, таких, что $\sum_{n=1}^{\infty}S_n^p\left(A\right)<\infty$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}S_n\left(A\right)<\infty\right)$, где $\left\{S_n\left(A\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность всех собственных чисел оператора $\left(A^*A\right)^{\frac{1}{2}}$, заномерированных в порядке убывания и с учетом их кратностей.

2. Пусть в гильбертовом пространстве H дан операторный пучок $L(\lambda)=\lambda^2 I+\lambda B+C$, где $B=B^*$ и C - компактные операторы такие, что $C>0$ и $T=BC^{-\frac{1}{2}}\in\gamma_\infty$.

Известно, что если пучку $L(\lambda)$ сопоставить оператор $A=\begin{pmatrix}0 & C^{\frac{1}{2}}\\ -C^{\frac{1}{2}} & -B\end{pmatrix}$ действующий в пространстве $H_1=H\times H$, то двукратная полнота собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$ эквивалентна полноте корневых векторов оператора A в пространстве H_1 $\left[1\right]$.

Введем в рассмотрение операторы $K=\begin{pmatrix}C^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & C^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$ и $S=\begin{pmatrix}0 & T\\ -T & -T^*T\end{pmatrix}$.

Не трудно проверить, что $-A^2=K\left(I_1+S\right)K$, где I_1 - единичный оператор в H_1. Если оператор $C\in\sigma_p$ при некотором $p<\infty$, то $K\in\sigma_p$, а также если $T\in\sigma_\omega$, то и $S\in\sigma_\omega$.

Введя в рассмотрение оператор

$P=\begin{pmatrix}0 & -I\\ I & T\end{pmatrix}$, получим $AP=K\left(I_1+S\right)$. Покажем, что $Ker\left(I_1+S\right)=0$. Допустим, что существует вектор $\psi=\left\{f,\,g\right\}\in H_1$, такой, что $\left(I_1+S\right)\psi=0$. Тогда $AP\psi=0$, т.е.

$$\begin{pmatrix}0 & C^{\frac{1}{2}}\\ -C^{\frac{1}{2}} & -B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ I & T\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}f\\ g\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & C^{\frac{1}{2}}\\ -C^{\frac{1}{2}} & -B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-g\\ f+Tg\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Так как $KerA = (0)$, то $\begin{pmatrix} -g \\ f+Tg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ т.е. $\psi = 0$.

3. Приведемнеобходимые в дальнейшем теоремы.

Теорема 1$([2])$**.** Пусть дан операторов $A = K(I+S)K$, где оператор $K > 0$ и $Ker(I_1 + S) = 0$. Если выполнено хотя бы одно из условий.

1. $K \in \sigma_p$ при некотором $p < \infty$ и $S \in \sigma_\infty$;
2. $S \in \sigma_\omega$,

то система всех корневых векторов оператора A полна в *H*.

Теорема 2$([3])$**.** Корневые подпространство компактного оператора A^2, отвечающее ею собственному числу $\lambda_0^2\ (\lambda_0 \neq 0)$ разлагается в прямую сумму корневых подпространств оператора *A*, отвечающих его числам $\pm\lambda_0$ т.е. $L_{\lambda_0}(A^2) = L_{\lambda_0}(A) \dot{+} L_{-\lambda_0}(A)$.

Теорема 3. Если система корневых векторов компактного оператора A^2 полна в пронстранстве A, то в *H*полна и система корневых векторов оператора A.

Теорема 4. Если для самосопряженного квадратичного пучка операторов $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C,$ где $C > 0,$ выполнено хотя бы одно из условий:

1) $C \in \sigma_P$, при некотором $p < \infty$ и $BC^{-\frac{1}{2}} \in \sigma_\infty$;

2) $BC^{-\frac{1}{2}} \in \gamma_\omega$,

то система собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$ двукратно полна в H.

Литература

1. Крейн М.Г., Лансер Г. К.*О некоторых математических принципах линейной теории лимпфированных колебаний континуума.*Международный симпозиум по применении теор. функц. М «Наука», 1965;
2. Новосельский И.А.*О некоторых признаках полноты системы корневых векторов вполне непрерывного оператора.* Изв. *АН МССР, серия физ.- мат,1965, №7*;
3. Горюк И. В. *О полноте системы собственных и присоединенных векторов квадратичного самосопряженного пучка*. Матем. иссл., том. VII, 1(23), Кишинев, 1972.