

# CALCULUL PLĂCILOR PRIN METODA ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ BAZATĂ PE SOLUȚII DISCONTINUE

**Autor: doctorand Sergiu GALBINEAN**  
**Conducător științific: dr. hab. prof. univ. Gheorghe MORARU**

Universitatea Tehnică a Moldovei

**Abstract:** Se propune spre examinare calculul plăcilor folosind soluțiile discontinue. În baza acestor soluții a fost elaborat un program de calcul pentru plăci cu contur arbitrar. Testarea programului s-a efectuat comparând rezultatele cu cele obținute prin alte metode.

**Cuvinte cheie:** metoda elementelor de frontieră, soluții discontinue, plăci, sisteme de ecuații integrale.

Să studiem o placă care are un defect. Defect se consideră linia  $L$  la trecerea căreia de la o margine la alta funcțiile pot avea salturi: săgeata, unghiul de rotire, momentul de încovoiere și forța tăietoare generalizată. Aceste salturi în sistemul local de coordonate  $(\bar{x}, \bar{y})$  vor fi notate prin  $\langle \bar{w} \rangle$ ,  $\langle \bar{\theta}_x \rangle$ ,  $\langle \bar{M}_x \rangle$  și  $\langle \bar{V}_x \rangle$ .

Folosind soluțiile din salturile concentrate ca funcții Green prin superpoziție putem scrie soluțiile discontinue pentru defectul amplasat pe conturul  $L$  (fig. 1).

Trecînd de la sistemul local de coordonate  $(\bar{x}, \bar{y})$  la sistemul local  $(n, t)$  amplasat în orice punct  $P$  putem scrie

$$\begin{aligned}
 w^* &= \int_L \bar{w}(P, Q) ds_Q; & M_{nt}^* &= \int_L \bar{M}_{ij}(P, Q) n_i t_j ds_Q; \\
 \theta_n^* &= \int_L \bar{\theta}_i(P, Q) n_i ds_Q; & Q_n^* &= \int_L \bar{\theta}_i(P, Q) n_i ds_Q; \\
 M_n^* &= \int_L \bar{M}_{ij}(P, Q) n_i n_j ds_Q; & V_n^* &= Q_n^* + \frac{\partial M_{nt}^*}{\partial t},
 \end{aligned} \tag{1}$$

unde  $n_1 = t_2 = \cos \gamma$  și  $n_2 = -t_1 = \sin \gamma$ ,  $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$ .

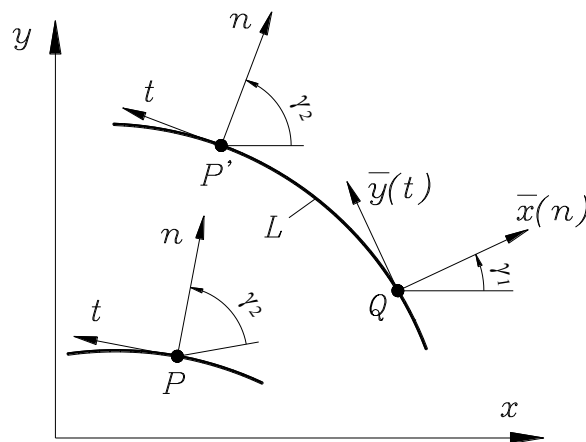


Fig. 1. Sistemul local de coordonate în planul median al plăcii  
În coordonate locale au loc relațiile:  $\{W\} = [G]\{S\}$ ;  $\{N\} = [T]\{S\}$ ;

unde  $\{S\} = [\langle w(0) \rangle \langle \theta_x(0) \rangle \langle M_x(0) \rangle \langle V_x(0) \rangle]^T$  reprezintă vectorul salturilor;

$$\{W\} = [w \ \theta_x \ \theta_y]^T; \quad \{N\} = [M_x \ M_y \ M_{xy} \ Q_x \ Q_y]^T$$

Prin superpoziție putem scrie

$$\begin{aligned} \bar{w}(P, Q) &= \bar{g}_{11}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{g}_{12}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{13}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{14}(P, Q) \langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\ \bar{\theta}_x(P, Q) &= \bar{g}_{21}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{g}_{22}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{23}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{24}(P, Q) \langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\ \bar{\theta}_y(P, Q) &= \bar{g}_{31}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{g}_{32}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{33}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{34}(P, Q) \langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\ \bar{M}_x(P, Q) &= \bar{t}_{11}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{12}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{13}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{14}(P, Q) \langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\ \bar{M}_y(P, Q) &= \bar{t}_{21}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{22}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{23}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{24}(P, Q) \langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\ \bar{M}_{xy}(P, Q) &= \bar{t}_{31}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{32}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{33}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{34}(P, Q) \langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\ \bar{Q}_x(P, Q) &= \bar{t}_{41}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{42}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{43}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{44}(P, Q) \langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\ \bar{Q}_y(P, Q) &= \bar{t}_{51}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{52}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{53}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{54}(P, Q) \langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\ \bar{V}_x(P, Q) &= \bar{l}_1(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{l}_2(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{l}_3(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{l}_4(P, Q) \langle \bar{V}_x(Q) \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Bara indică că funcția respectivă este prezentată în coordonate locale  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Funcțiile  $\bar{g}_{ij}$ ,  $\bar{t}_{ij}$  reprezintă elementele matricelor  $[G]$  cu dimensiunea  $3 \times 4$  și respectiv  $[T]$  cu dimensiunea  $5 \times 4$ .

Pentru a obține ecuațiile integrale, starea de deformare a plăcii este prezentată ca suma a două stări. Prima (notată cu cerculeț) provine din sarcina exterioară. A doua (notată cu steluță) provine din salturile concentrate pe linia  $L$  a defectului

$$\begin{aligned} w(P) &= w^o(P) + w^*(P), & \theta_n(P) &= \theta_n^o(P) + \theta_n^*(P), \\ M_n(P) &= M_n^o(P) + M_n^*(P), & V_n(P) &= V_n^o(P) + V_n^*(P). \end{aligned} \quad (3)$$

Salturile respective se vor determina din condiții de rezemare pe conturul plăcii  $L$ .

Soluțiile discontinue sunt destinate pentru rezolvarea diferitor probleme ale plăcilor cu defecte. Deasemenea aceste soluții pot fi folosite pentru rezolvarea problemelor de bază și probleme cu condiții de frontieră mixte. În aceste cazuri frontiera va fi considerată ca defect. Apropiindu-ne de frontiera defectului din interiorul regiunii ocupate de placă, salturile  $w$ ,  $\theta_n$ ,  $M_n$ ,  $V_n$  vor fi considerate egale cu valorile de pe frontieră. Apropiindu-ne de frontieră din exteriorul defectului aceste salturi se vor considera nule.

Ca exemplu se va cerceta o placă pătrată, simplu rezemată pe contur (fig.2), solicitată în centru de o forță concentrată  $F$ . Traversînd frontiera plăcii forța transversală generalizată  $V_n$  și unghiul de rotire  $\theta_n$  au salturi. Folosind condițiile de frontieră pentru o placă simplu rezemată putem scrie

$$\begin{cases} M_n^{(\theta)} + M_n^{(V)} + M_n^o = 0 \\ w_n^{(\theta)} + w_n^{(V)} + w_n^o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_n^{(\theta)} + M_n^{(V)} = -M_n^o \\ w_n^{(\theta)} + w_n^{(V)} = -w_n^o \end{cases} \quad (4)$$

unde  $M_n^{(\theta)}$  și  $w_n^{(\theta)}$  - reprezintă momentul, respectiv săgeata provenită din saltul  $\langle \theta \rangle$ ;

$M_n^{(V)}$  și  $w_n^{(V)}$  - reprezintă momentul, respectiv săgeata provenită din saltul  $\langle V \rangle$ ;

$M_n^o$  și  $w_n^o$  - reprezintă momentul, respectiv săgeata provenită din forța exterioară  $F$ ;

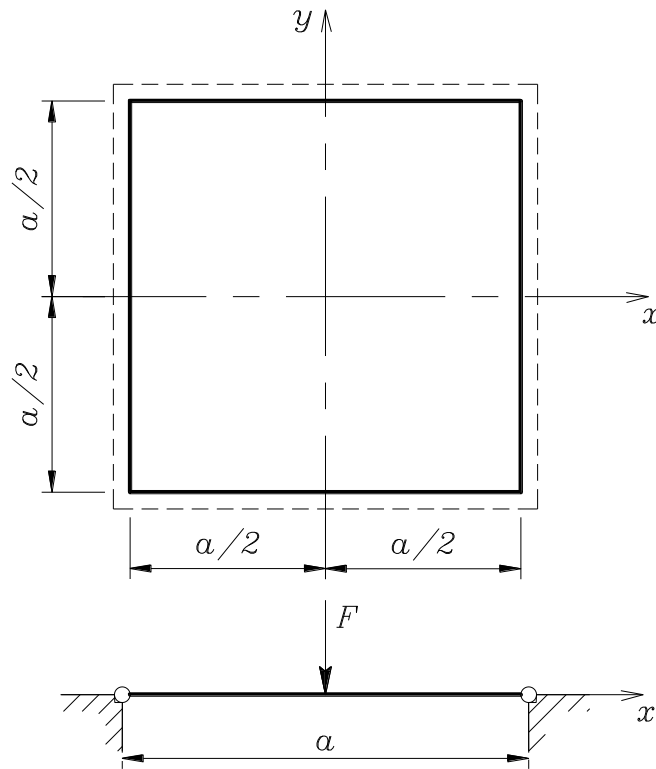


Fig. 2. Placă simplu rezemată sollicitată de o forță concentrată

Folosind relațiile (1) și (2) putem scrie

$$\begin{aligned}
 M_n^{(\theta)}(P) &= \int_L \left[ n_x^2 \bar{t}_{12}(P, Q) + n_y^2 \bar{t}_{22}(P, Q) + 2n_x n_y \bar{t}_{32}(P, Q) \right] \langle \theta_n(Q) \rangle ds_Q; \\
 M_n^{(V)}(P) &= \int_L \left[ n_x^2 \bar{t}_{14}(P, Q) + n_y^2 \bar{t}_{24}(P, Q) + 2n_x n_y \bar{t}_{34}(P, Q) \right] \langle V_n(Q) \rangle ds_Q.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Prin analogie obținem relațiile pentru deplasările provenite din salturile  $\langle \theta_n \rangle$  și  $\langle V_n \rangle$

$$\begin{aligned}
 w_n^{(\theta)}(P) &= \int_L \left[ \bar{g}_{12}(P, Q) \right] \langle \theta_n(Q) \rangle ds_Q; \\
 w_n^{(V)}(P) &= \int_L \left[ \bar{g}_{14}(P, Q) \right] \langle V_n(Q) \rangle ds_Q.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Momentul  $M_n^o$  și deplasarea verticală  $w_n^o$  depinde de tipul încărcării exterioare. De exemplu, dacă placa este încărcată cu o forță concentrată  $F$  în origine, atunci

$$\begin{aligned}
 M_n^o(P) &= F \left[ n_x^2 \bar{t}_{14}(P, Q) + n_y^2 \bar{t}_{24}(P, Q) + 2n_x n_y \bar{t}_{34}(P, Q) \right]; \\
 w_n^o(P) &= F \bar{g}_{14}(P, Q).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Efectuând discretizarea frontierei într-un set de elemente constante, obținem următorul sistem linear de ecuații

$$\sum_{j=1}^{ne} (a_{ij} \langle \theta_n^j \rangle + b_{ij} \langle V_n^j \rangle) = b_i^1; \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{ne} (c_{ij} \langle \theta_n^j \rangle + d_{ij} \langle V_n^j \rangle) = b_i^2.$$

unde

$$a_{ij} = \int_{L_j} \left[ n_x^2 \bar{t}_{12}(P^i, Q) + n_y^2 \bar{t}_{22}(P^i, Q) + 2n_x n_y \bar{t}_{32}(P^i, Q) \right] ds_Q; \quad c_{ij} = \int_L \bar{g}_{12}(P^i, Q) ds_Q; \quad (9)$$

$$b_{ij} = \int_{L_j} \left[ n_x^2 \bar{t}_{14}(P^i, Q) + n_y^2 \bar{t}_{24}(P^i, Q) + 2n_x n_y \bar{t}_{34}(P^i, Q) \right] ds_Q; \quad d_{ij} = \int_L \bar{g}_{14}(P^i, Q) ds_Q.$$

$$b_i^1 = - \sum_{j=1}^{ne} \int_{L_j} M_n^o(P^i, Q) ds_Q; \quad b_i^2 = - \sum_{j=1}^{ne} \int_{L_j} w_n^o(P^i, Q) ds_Q. \quad (10)$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (8) pot fi calculate deplasările și eforturile în orice punct din interiorul plăcii folosind relațiile (1-3), ele fiind exprimate prin salturile care deja sunt cunoscute.

În continuare este prezentat calculul numeric a plăcii cercetate cu ajutorul unui program creat în limbajul de programare Matlab (fig3). Schema logică a algoritmului este prezentată în fig. 3.

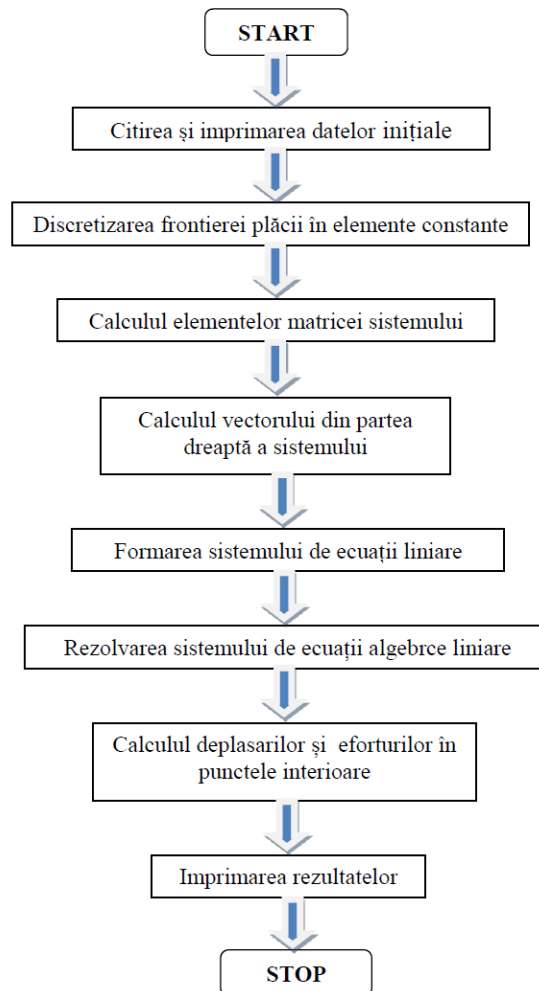


Fig. 3. Schema logică a algoritmului.

Frontiera plăcii cercetate (fig.2) a fost discretizată în 20 de elemente constante. Rezultatele obținute au fost comparate cu metoda elementelor finite (MEF) pentru o rețea de discretizare necesară pentru a obține

soluții exacte. În acest scop, pentru calculul cu MEF s-a ales o rețea 10x10 elemente, cu trei grade de libertate în nod.. Deplasările verticale în punctele situate pe axa  $x$  sunt prezentate în fig. 4.

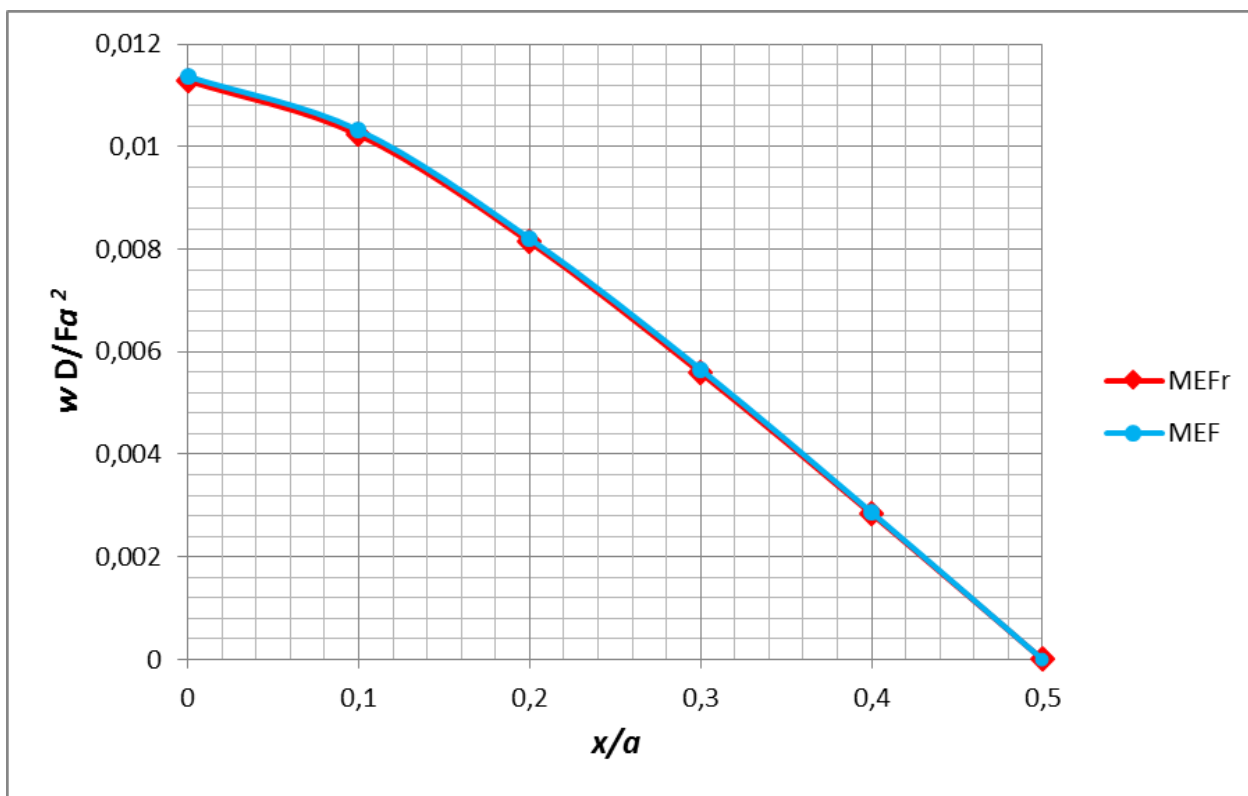


Fig. 4. Deplasarea verticală  $w$  de-a lungul axei  $x$  în intervalul  $0 \leq x \leq a/2$ .

**Concluzii:** Din graficul prezentat se constată că, rezultatele obținute prin ambele metode coincid. Avantajul clar a metodei elementelor de frontieră (MEFr) constă în faptul că dă posibilitatea de a discretiza numai frontiera domeniului, reducând esențial dimensiunile sistemului de ecuații algebrice. Programele MEFr necesită mai puține date de intrare și utilizează memorie operativă mai mică în comparație cu programele MEF.

Abordarea problemelor de calcul ale plăcilor cu contur arbitrar bazată pe soluții discontinue prezintă o concepție nouă și de perspectivă.

## Bibliografie

- MORARU Gh. BEM based on discontinuous solutions in the theory of Kirchhoff plates on an elastic foundation. ELSEVIER. Engineering Analysis with Boundary Elements 30 (2006) 382-390.
- МОПАРУ Г.А. Метод разрывных решений в механике деформируемых тел. Штиинца, Кишинев, 1990.
- MORARU Gh, Introducere în metoda elementelor finite și de frontieră, UTM, Chișinău 2002
- Katsikadelis, J.T; Armenakas, A.E. A new boundary equation solution to the plate problem. ASME Journal of Applied Mechanics 1989. 56: 364–374 p.
- BREBBIA C.A., Telles J.C.F. Boundary Element Methods in Engineering Science. McGraw-Hill, London, 1981.
- BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R. Boundary Element Methods in Engineering Science. McGraw-Hill Company. (UK) LTD, London – New-York, 1981.
- LAZĂR, I. Metoda elementelor de frontieră în inginerie. Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 1997.
- TIMOSHENKO, S.P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of Plates and Shells (2nd edn). McGraw-Hill: New York, 1959.