

# DETERMINAREA CÎMPULUI DE TEMPERATURĂ ÎN BANDĂ CU CONDIȚII MIXTE DE LIMITĂ

**Autor: doctorand Ion CREȚU**  
**Conducător științific: dr. hab., prof. univ. Victor ȘEREMET**

Universitatea Tehnică a Moldovei

**Abstract:** S-a determinat cîmpul interior de temperatură pentru o bandă cu condiții mixte de limită, pentru aceasta preventiv s-a construit funcția Green pentru acest domeniu care verifică ecuația Poisson. S-a construit graficul funcției Green.

Pentru aplicare s-a analizat o bandă cu următoarele condiții:  $-b \leq x_1 \leq +b, 0 \leq x_2 \leq a_2$ , pe latura  $x_2 = 0$  este aplicată o temperatură constantă  $T_0$  pe intervalul  $-c \leq x_1 \leq +c, b > c$ , iar în afara acestui interval temperatura este zero. Pe latura  $x_2 = a_2$  fluxul de căldură  $\frac{\partial T(y_2, a_2)}{\partial x_2} = 0$ . Sursa interioară de căldură  $F(\xi_1, \xi_2) = Q$ . În final s-a construit graficul cîmpului interior de temperatură pentru acest domeniu.

**Cuvinte cheie:** cîmp interior de temperatură, funcția Green, ecuația Poisson.

## 1 Formularea generală a problemei:

Să se determine cîmpul interior de temperatură pentru banda  $B(-\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 \leq a_2)$  vezi (Fig.1), astfel încît în interiorul ei este dată sursa de căldură  $F(\xi_1, \xi_2)$ , pe latura  $x_2 = 0$  este dată temperatura  $T(y_2, 0)$ , iar pe latura  $x_2 = a_2$  este dat fluxul de căldură  $\frac{\partial T(y_2, a_2)}{\partial x_2}$ .

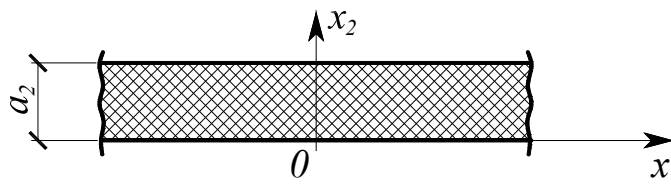


Fig.1. Schema unei benzi B

## 2 Rezolvare:

Cîmpul interior de temperatură pentru un domeniu în formă de bandă poate fi utilizat în mai multe direcții. Unele dintre ele sunt: determinarea cîmpului interior de temperatură a unui perete sau determinarea tensiunilor și deplasărilor termoelastice în bandă.

Pentru a determina cîmpul interior de temperatură ne vom folosi de următoarea formulă integrală generală pentru domenii tridimensionale[6]:

$$T(x) = \alpha^{-1} \int_V F(z) G(x, z) dV(z) - \int_{\Gamma_D} T(y_0) \frac{\partial G(y_0, x)}{\partial n_0} d\Gamma_D(y_0) + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial T(y_0)}{\partial n_0} G(y_0, x) d\Gamma_N(y_0) + \int_{\Gamma_M} \left[ \alpha T(y_0) + \alpha \frac{\partial T(y_0)}{\partial n_0} \right] G(y_0, x) d\Gamma_M(y_0); \quad (1)$$

În relația (1)  $\alpha$  este coeficientul de conductibilitate termică,  $\alpha$  este coeficientul schimbului conectiv de căldură,  $F(z)$ —sursa interioară de căldură a corpului,  $T(y_0)$ —temperatura dată pe o suprafață  $\Gamma_D$ ,  $\frac{\partial T(y_0)}{\partial n_0}$ —fluxul de căldură dat pe o suprafață  $\Gamma_N$ , iar  $\alpha T(y_0) + \alpha \frac{\partial T(y_0)}{\partial n_0}$  este schimbul de căldură dintre suprafața  $\Gamma_M$  și mediul

exterior,  $G(y_0, x)$  este funcția Green, iar  $\frac{\partial G(y_0, x)}{\partial n_0}$  este derivata pe normala exterioară a funcției Green.

$\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_M$  sunt condițiile de limită pe fiecare suprafață a corpului, respectiv:

- $\Gamma_D$  - condiție de limită de tipul Dirichlet;
- $\Gamma_N$  - condiție de limită de tipul Neumann;
- $\Gamma_M$  - condiție de limită de tip mixt.

În cazul benzii B condițiile de limită sunt: pentru latura  $x_2 = 0$  condiția de limită de tipul Dirichlet ( $\Gamma_D$ ), iar pentru latura  $x_2 = a_2$  condiția de limită de tipul Neumann ( $\Gamma_N$ ). Pentru această bandă condiția de limită de tip mixt  $\Gamma_M = 0$ . Conform formulării problemei, expresia (1) se va scrie în felul următor:

$$T(x_1, x_2) = a^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{a_2} F(\xi_1, \xi_2) G(x_1, \xi_1; x_2, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} T(y_1, 0) \frac{\partial G(y_1, x_1; 0, x_2)}{\partial x_2} dy_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial T(y_1, a_2)}{\partial x_2} G(y_1, x_1; a_2, x_2) dy_1; \quad (2)$$

În (2) s-a avut în vedere schimbarea semnului pentru a doua integrală, deoarece normala pe suprafața  $x_2 = 0$  este contrar direcției axei de coordonate „ $x_2$ ”. Tot din aceeași relație se observă că pentru a determina câmpul interior de temperatură este necesar de construit funcția Green care verifică ecuația Poisson pentru banda B. Ecuația Poisson descrie mai multe fenomene, în articolul de față se va precăuta aplicarea funcției Green care verifică ecuația Poisson pentru a determina câmpul interior de temperatură.

a. Se construiește funcția Green care verifică ecuația Poisson:

$$\nabla^2 G(x, \xi) = -\delta(x - \xi); \quad (3)$$

pentru un domeniu în formă de banda B, luând în considerație următoarele condiții mixte de limită:

$$\begin{aligned} G &= 0; \quad x_2 = 0, \quad -\infty < x_1 < +\infty; \\ \frac{\partial G}{\partial x_2} &= 0; \quad x_2 = a_2, \quad -\infty < x_1 < +\infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Deoarece aceasta este o problemă pentru domenii nelimitate ( $-\infty < x_1 < +\infty$ ), funcția Green  $G(x, \xi)$  trebuie să ia o valoare finită la infinit  $G|_{x_1=\pm\infty} < \infty$ .

Construirea funcției Green pentru banda B este prezentată în [3]. Conform sursei [1,2,3] la construirea funcției Green pentru banda B trebuie să aducem ecuația de două dimensiuni la construirea funcției Green de o dimensiune. Ulterior pentru construirea funcției Green pentru ecuații ordinare se va folosi algoritmul prezentat [1,2].

Conform metodei [3, ex.3 pag. 144] expresia finală a funcției Green în funcții elementare va fi:

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\bar{E}\bar{E}_2}{E\bar{E}_2}, \quad (5)$$

Unde funcțiile  $\bar{E}, E, \bar{E}_2, E_2$  se vor determina după următoarele expresii:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= 1 + 2e^{\frac{\pi}{2a_2}(x_1 - \xi_2)} \cos \frac{\pi}{2a_2}(x_2 - \xi_2) + e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1 - \xi_2)}; \\ E &= 1 - 2e^{\frac{\pi}{2a_2}(x_1 - \xi_2)} \cos \frac{\pi}{2a_2}(x_2 - \xi_2) \\ &\quad + e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1 - \xi_2)}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{E}_2 = 1 + 2e^{\frac{\pi}{2a_2}(x_2 - \xi_2)} \cos \frac{\pi}{2a_2}(x_2 + \xi_2) + e^{\frac{\pi}{a_2}(x_2 - \xi_2)};$$

$$\bar{E}_2 = 1 - 2e^{\frac{\pi}{2a_2}(x_2 - \xi_2)} \cos \frac{\pi}{2a_2}(x_2 + \xi_2) + e^{\frac{\pi}{a_2}(x_2 - \xi_2)}.$$

### b. Construirea graficului funcției Green.

Folosind programa Maple 15s-a construit graficul funcției Green(5) pentru bandă cu intervalul  $-b \leq x_1 \leq +b, b = 1,6m, 0 \leq x_2 \leq a_2, a_2 = 0,4m$ , dacă pe latura  $x_2 = 0, G = 0$ , iar pe latura  $x_2 = a_2, \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0$ . Punctul de aplicare are coordonatele  $\xi_1 = 0,1m, \xi_2 = 0,1m$ .

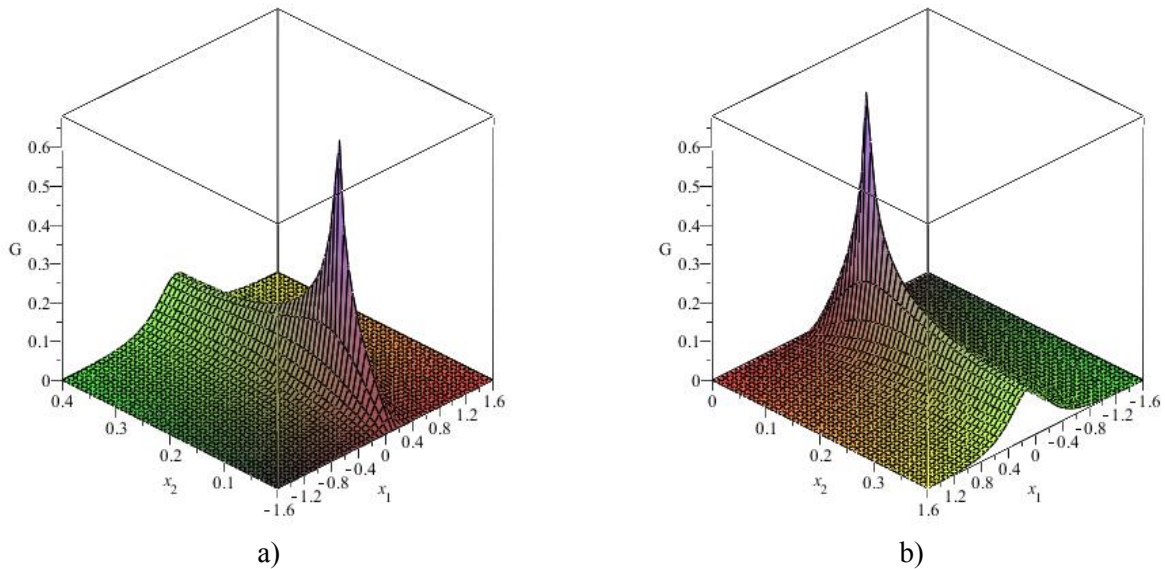


Fig.2 Graficul funcției Green pentru bandă cu condiții mixte de limită

Graficele din Fig.2 reprezintă aceeași funcție arătată din diferite părți, dacă le analizăm putem afirma:

- dacă punctul de aplicare cu coordonatele  $(\xi_1, \xi_2)$  va coincide cu punctul de răspuns cu coordonatele  $(x_1, x_2)$ , atunci funcția  $G \rightarrow \infty$  în comparație cu celelalte mărimi;
- se respectă condițiile de limită impuse inițial, cum se vede din Fig.2. a),  $G = 0$  pentru  $x_2 = 0$ , și din Fig.2. b),  $\frac{\partial G}{\partial x_2} = 0$  pentru  $x_2 = a_2$ ;
- pentru latura  $x_2 = a_2$ , funcția Green practic are valoarea  $G = 0$  pentru intervalul  $+1,0m \leq x_1 \leq -1,0m$ ;
- graficul este simetric în raport cu planul care trece prin punctul  $\xi_1 = 0,1m$  și respectiv asimetric în raport cu celălalt plan  $\xi_2 = 0,1m$ .

### 3. Aplicarea funcției Green la determinarea câmpului interior de temperatură.

Se determină câmpul interior de temperatură, se construiește graficul pentru bandă cu intervalul  $-b \leq x_1 \leq +b, b = 1,6m, 0 \leq x_2 \leq a_2, a_2 = 0,4m$ , dacă pe latura  $x_2 = 0$  pe intervalul  $-c \leq x_1 \leq +c, c = 0,3m$  acționează o temperatură constantă  $T_0 = 293K$ , în afara acestui interval temperatura este zero. Pe latura  $x_2 = a_2$  fluxul de căldură este zero. Sursa interioară de căldură este egală cu zero.

Folosind relația (2) și condițiile problemei scrise mai sus rezultă: sursa interioară de căldură  $F(\xi_1, \xi_2) = 0$ ; pe latura  $x_2 = a_2$  fluxul de căldură  $\frac{\partial T(x_2, a_2)}{\partial x_2} = 0$ .

Astfel expresia (2) va căpăta următoarea formă:

$$T(x_1, x_2) = \int_{-c}^{+c} T_0 \frac{\partial G(y_1, x_1, 0, x_2)}{\partial x_2} dy_1; \quad (7)$$

Pentru determinarea cîmpului interior de temperatură se utilizează (7), în care:

$$\frac{\partial G(y_1, x_1, 0, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{4\pi} \ln \bar{E} - \frac{1}{4\pi} \ln \bar{E}' + \frac{1}{4\pi} \ln \bar{E}_2 - \frac{1}{4\pi} \ln \bar{E}_2' \right); \quad (8)$$

În urma derivării funcției Green pe normala exterioară (8) se înlocuiește în (7) și se schimbă variabilele. În urma simplificărilor se obține următoarea integrală:

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) &= \int_{-c}^{+c} T_0 \left( \frac{\frac{\frac{\pi}{2a_2}(y_1-x_2)}{e^{\frac{\pi}{2a_2}(y_1-x_2)}} \sin \frac{\pi x_2}{2a_2}}{2a_2 \left( 1 + 2e^{\frac{\pi}{2a_2}(y_1-x_2)} \cos \frac{\pi x_2}{2a_2} + e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1-x_2)} \right)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{\frac{\pi}{2a_2}(y_1-x_2)}{e^{\frac{\pi}{2a_2}(y_1-x_2)}} \sin \frac{\pi x_2}{2a_2}}{2a_2 \left( 1 - 2e^{\frac{\pi}{2a_2}(y_1-x_2)} \cos \frac{\pi x_2}{2a_2} + e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1-x_2)} \right)} \right) dy_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Pentru a rezolva integrala (9) o divizăm în 2 integrale:

$$T(x_1, x_2) = T_1(x_1, x_2) + T_2(x_1, x_2), \quad (10)$$

Se scot constantele în afara integralei și se calculează prima integrală din (10). Pentru rezolvarea primei integrale (10) ne vom folosi de [5], vom nota:  $t^2 = e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1-x_2)}$  și  $m = 2 \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}$ , vom obține integrala:

$$T_1(x_1, x_2) = \frac{T_0 \sin \frac{\pi x_2}{2a_2}}{2a_2} \cdot \frac{2a_2}{\pi} \int_{-c}^{+c} \frac{dt}{1 + mt + t^2}; \quad (11)$$

În urma rezolvării integralei (11) și înlocuind notările făcute, în urma simplificărilor vom căpăta următoarea expresie:

$$\begin{aligned} T_1(x_1, x_2) &= \frac{T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{2a_2}(y_1-x_2)} + \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{2a_2}} \Big|_{-c}^{+c}; \end{aligned} \quad (12)$$

Rezultatul final al integrării este:

$$\begin{aligned} T_1(x_1, x_2) &= \frac{T_0}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{2a_2}(c-x_2)} + \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{2a_2}} \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{arctg} \frac{e^{-\frac{\pi}{2a_2}(c+x_2)} + \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{2a_2}} \right]; \end{aligned} \quad (13)$$

În mod analogic se rezolvă și cealaltă integrală din (10), rezultatul final a acesteea va avea forma:

$$T_2(x_1, x_2) = \frac{T_0}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\frac{\pi}{2a_2}(c-x_2) - \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{2a_2}} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{-\pi}{2a_2}(c+x_2) - \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{2a_2}} \right]; \quad (14)$$

În formă finală câmpul interior de temperatură va putea fi calculat cu următoarea expresie:

$$T(x_1, x_2) = \frac{T_0}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\frac{\pi}{2a_2}(c-x_2) + \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{2a_2}} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{-\pi}{2a_2}(c+x_2) + \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{2a_2}} + \operatorname{arctg} \frac{\frac{\pi}{2a_2}(c-x_2) - \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{2a_2}} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{-\pi}{2a_2}(c+x_2) - \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{2a_2}} \right]; \quad (15)$$

Folosind programa Maple 15 s-a construit graficul câmpului interior de temperatură(15), unde s-a avut în vedere condițiile inițiale ale problemei.

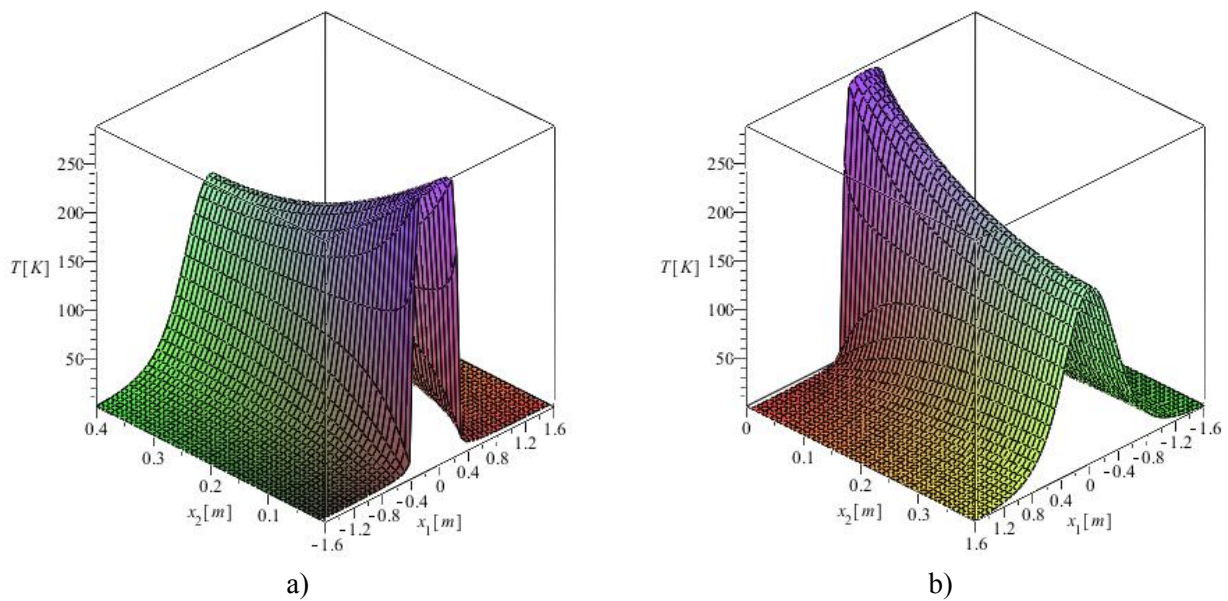


Fig.3 Graficul câmpului interiorde temperatură pentru bandă

Graficele din Fig.3 reprezintă câmpul interior de temperatură pentru bandă arătat din diferite părți. Analizînd aceste grafice putem afirma:

- programa nu a construit graficul în apropierea ordonatei  $x_2 = 0$ , din motiv că funcția nu este definită în acest punct. Vom studia asimptotica acestei funcții pentru a verifica condiția de limită. Pentru aceasta s-a calculat limita funcției  $T(x_1, x_2)$  cînd  $x_2 \rightarrow 0$  din partea dreaptă, pe intervalul  $-0,3m < x_1 < +0,3m$  și în afara acestui interval  $+0,3m < x_1 < -0,3m$ .

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T(x_1, x_2); \quad (16)$$

Se calculează limita funcției pentru intervalul  $-0,3m < x_1 < +0,3m$  cînd  $x_2 \rightarrow 0$  din partea dreaptă :

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T(x_1, x_2) = \frac{T_0}{\pi} \left[ \lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} \infty - \lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} \infty + \lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} \infty - \lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg}(-\infty) \right] \quad (17)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T(x_1, x_2) = \frac{T_0}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = T_0; \quad (18)$$

Se calculează limita funcției pentru intervalul  $+0,3m < x_1 < -0,3m$  când  $x_2 \rightarrow 0$  din partea dreaptă :

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T(x_1, x_2) = \frac{T_0}{\pi} \left[ \lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \arctg \infty - \lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \arctg \infty - \lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \arctg \infty + \lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \arctg \infty \right]; \quad (19)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T(x_1, x_2) = \frac{T_0}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 0; \quad (20)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T(x_1, x_2) = 0; \quad (21)$$

- se respectă condițiile de limită impuse inițial, pentru latura  $x_2 = 0$  cum se vede din Fig.3. a) și (18),  $T(x_1, x_2) = T_0 = 293K$  pentru  $-0,3m < x_1 < +0,3m$ , iar din (21)  $T(x_1, x_2) = 0$  pentru intervalul  $+0,3m < x_1 < -0,3m$ . Pentru latura  $x_2 = a_2$ , cum se vede din Fig.3. b)  $\frac{\partial T(x_1, a_2)}{\partial x_2} = 0$ ;

- pentru latura  $x_2 = 0$ , funcția capătă valoarea  $T(x_1, x_2) = 0$  pe intervalul  $+0,3m < x_1 < -0,3m$ , iar pentru latura  $x_2 = a_2$  aceeași valoare funcția o capătă pe intervalul  $+1,5m < x_1 < -1,5m$ ;

- se observă că graficul este simetric în raport cu planul care trece prin punctul  $x_1 = 0$  și respectiv asimetric în raport cu celălalt plan.

#### Concluzii:

1. Relația cîmpului interior de temperatură (15) poate fi folosită pentru determinarea cîmpului de temperatură pentru bandă cu orice dimensiuni și valoarea temperaturii care acționează pe un anumit interval pe latura  $x_2 = 0$ . Dacă temperatura nu va fi o constantă ci o funcție, atunci va fi necesar de calculat din nou această integrală.

2. Cîmpul interior de temperatură deja determinat poate fi folosit în domeniul termoelasticității la determinarea deplasărilor și tensiunilor în bandă.

#### Bibliografie:

1. Șeremet Victor. *Funcții de influență în termoelasticitatea staționară*. Chișinău, 2003, 308p.
2. Șeremet Victor. *Funcții Green pentru ecuația Poisson*. Chișinău, 2003, 242p.
3. Șeremet Victor, Bonnet Guy. *Encyclopedia of domain Green's functions*. Chișinău, 2008, 220p.
4. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. *Краткий курс математического анализа*. Москва: Наука, 1969, 736с.
5. Выгодский М. Я. *Справочник по высшей математике*. Москва: Астрель•АСТ, 2006, 992с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений*. Москва: Наука, 1971, 1108с.
7. Каргашов Э. М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*. М.: Высш. шк., 1985, 480с.