DESPRE FUNCȚIILE HIPERBOLICE

Autor: Grigorii SARANCIUC
Coordonator științific: conf. dr., Ion LEAH

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Рассматриваются гиперболические функции с разных точек зрения. Во-первых, устанавливаются некоторые соотношения для формул сложения, для формул двойного аргумента, для формул понижения степени и др. С помощью производных проведено полное исследование всех четырех гиперболических функций. Указаны типы гиперболических подстановок, с помощью которых можно интегрировать иррациональные функции определенной формы.*

Cuvinte cheie: *funcții hiperbolice, funcții pare şi impare, funcția exponențială, hiperbola, ecuațiile parametrice, integrarea fracțiilor iraționale.*

Studiul oricărei funcții presupune, în primul rând, acumularea unor informații ample despre proprietățile acesteia. Una dintre aceste proprietăți este paritatea (imparitatea) funcției. O funcție se numeşte pară (respectiv, impară), dacă $f(-x)=f(x)$ (respectiv, $f(-x)=-f(x)$). Se ştie, că oricare funcție poate fi prezentată ca suma a două funcții – una pară şi una impară. Pentru funcția exponențială $f(x)=e^x$ aceste două funcții sunt *cosinusul hiperbolic* ch *x* şi *sinusul hiperbolic* sh *x,* definite astfel:

$$\mathrm{ch}\, x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}\, x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} .$$

Termenul de „funcții hiperbolice" se datorează următorului fapt. Hiperbola, cu ecuația ei canonică $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, admite şi ecuații parametrice, acestea fiind:

$$\begin{cases} x=a\cdot cht, \\ y=b\cdot sht; \end{cases} \text{(pentru ramura dreaptă)}; \quad \begin{cases} x=-a\cdot cht, \\ y=b\cdot sht. \end{cases} \text{(pentru ramura stângă)}.$$

Rolul funcțiilor definite parametric se vede, de exemplu, la calcularea integralelor curbilinii.

Reieşind doar din definiția funcțiilor ch *x* şi sh *x* , se stabilesc unele proprietăți de-ale lor, de exemplu:

1. $ch^2x+sh^2x=ch2x$; 2. $ch^2x-sh^2x=1$; 3. $sh(x\pm y)=shx\cdot chy\pm chx\cdot shy$;
4. $ch(x\pm y)=chx\cdot chy\pm shx\cdot shy$; 5. $sh2x=2shx\cdot chx$; 7. $ch3x=4ch^3x-3chx$;
8. $ch^2x=\dfrac{1+ch2x}{2}$; 9. $sh^2x=\dfrac{ch2x-1}{2}$.

Aceste proprietăți apropie funcțiile hiperbolice de cele trigonometrice (circulare), deşi nu au proprietatea principală a acestora: periodicitatea.

Ca şi în cazul funcțiilor trigonometrice, se mai definesc două funcții: tangenta şi cotangenta hiperbolică:

$$thx=\frac{shx}{chx}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}; \quad cthx=\frac{chx}{shx}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} .$$

Cum funcțiile hiperbolice se exprimă prin funcțiile exponențiale e^x şi e^{-x}, relativ simplu se obțin formulele pentru derivarea lor:

$$(shx)'=chx; \ (chx)'=shx; \ (thx)'=1/ch^2x; \ (cthx)'=-1/sh^2x.$$

Aplicând aceste derivate, s-a efectuat un studiu complet al tuturor celor patru funcții hiperbolice şi s-au construit graficele lor. Ca exemplu, graficele a două dintre ele, sh *x* şi cth *x,* sunt prezentate în Fig. 1 şi Fig. 2.

Din formulele de derivare a funcțiilor hiperbolice rezultă şi formulele de integrare a acestora:

1. $\int shxdx$ = ch x + C; **2.** $\int chxdx$ = sh x + C; **3.** $\int thxdx$ = ln ch $x+C$;

4. $\int cthxdx$ = ln |sh x| + C; **5.** $\int \dfrac{dx}{ch^2x}$ = th $x+C$; **6.** $\int \dfrac{dx}{sh^2x}$ = - cth x +C.

Un interes deosebit prezintă aplicarea substituțiilor hiperbolice, prin asemănare cu substituțiile trigonometrice, la integrarea unor expresii iraționale. Să examinăm integrala $\int R\left(x,\sqrt{T}\right)dx$, unde T este un trinom pătrat de variabila x, iar R – o funcție rațională de cei doi argumenți. Prin separarea pătratului perfect şi o substituție liniară trinomul T se aduce la una din formele $t^2 \pm m^2$; m^2-t^2 ; deci şi integrala inițială se aduce

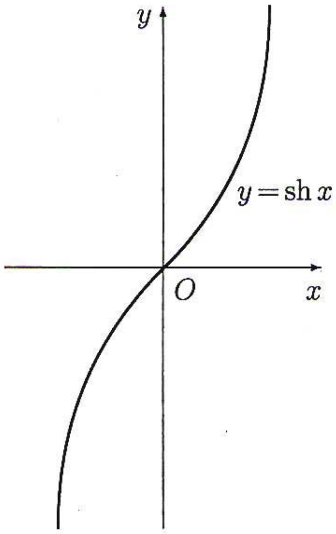

Fig. 1

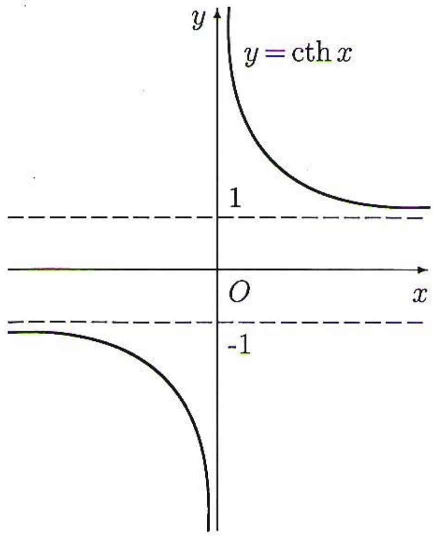

Fig. 2

la unul din următoarele trei tipuri:

1. $\int \mathrm{R}\left(t;\sqrt{m^2-t^2}\right)\mathrm{dt}$; **2.** $\int \mathrm{R}\left(t;\sqrt{t^2-m^2}\right)\mathrm{dt}$; **3.** $\int \mathrm{R}\left(t;\sqrt{t^2+m^2}\right)\mathrm{dt}$.

În fiecare caz se poate efectua câte o substituție hiperbolică raționalizatoare, respectiv:

1. $t = m$ th z; **2.** $t = m$ ch z; **3.** $t = m$ sh z.

În comparație cu substituțiile trigonometrice, substituțiile hiperbolice necesită calcule mult mai simple.

În calitate de exemplu, vom afla integrala $I = \int \frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2}dx$, pentru care poate fi efectuată substituția $x = \sqrt{3}$ sh t. Atunci $x^2 = 3sh^2t$; $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{3sh^2t+3} = \sqrt{3(sh^2t+1)} = \sqrt{3ch^2t} = \sqrt{3}cht$;

$dx = \left(\sqrt{3}sht\right)' dt = \sqrt{3}$ ch t dt. Prin urmare,

$$I = \int \frac{\sqrt{3}cht}{3sh^2t}\cdot\sqrt{3}chtdt = \int \frac{ch^2t}{sh^2t}dt = \int \frac{sh^2t+1}{sh^2t}dt = \int\left(1+\frac{1}{sh^2t}\right)dt = t - \text{cth}\ t + C_1 .$$

Revenind la substituția efectuată, $x = \sqrt{3}$ sh t, aflăm sh $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$ sau $e^t - e^{-t} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$. Rezolvând această ecuație în raport cu necunoscuta t, aflăm $t = \ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right) - \ln\sqrt{3}$. Cum $cht = \sqrt{1+sh^2t} = \frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}}$,

aflăm cth $t = \frac{cht}{sht} = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$. Astfel, $I = \ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right) - \ln\sqrt{3} - \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} + C_1$ sau, definitiv,

$$I = \ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right) - \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} + C.$$

Aplicând substituțiile trigonometrice, aflarea acestei integrale ar fi fost mult mai dificilă.

Bibliografie

1. Шерватов, В.Г. *Гиперболические функции.* М, 1958.
2. Янпольский, А.Р. *Гиперболические функции.* Физматгиз. М, 1960.