

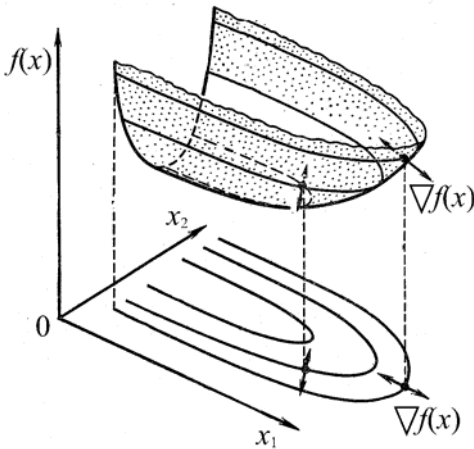


Digitally signed  
by Library UTM  
Reason: I attest  
to the accuracy  
and integrity of  
this document

*Vasile Moraru*

**E L E M E N T E  
DE CALCUL NUMERIC ȘI OPTIMIZĂRI**

*Note de curs*



Chișinău  
2009

*Facultatea Calculatoare, Informatică și  
Microelectronică  
Catedra Informatica Aplicată*

**Conf. univ., dr. Vasile MORARU**

**E L E M E N T E  
DE CALCUL NUMERIC ȘI OPTIMIZĂRI**  
*Note de curs*

Chișinău  
U.T.M.  
2009

În lucrare sunt prezentate principalele metode de calcul numeric pentru rezolvarea unor probleme ce pot fi întâlnite frecvent în practică. Ea se adresează în primul rând studenților Universității Tehnice a Moldovei și va constitui un sprijin efectiv la predarea cursurilor *Metode numerice*, *Cercetări operaționale*, *Matematică de calcul*, *Programare matematică*, *Modele matematice și optimizări* ș.a. Cartea însă poate fi folosită și de toți cei care sunt preocupați de utilizarea metodelor numerice și a mijloacelor electronice de calcul la soluționarea problemelor practice.

Autor: conf. univ., dr. Vasile Moraru

Redactor responsabil - prof. univ. dr. habilitat Anatol Popescu

Recenzent - conf. univ. dr. Mihail Perebinos

© U.T.M., 2009

## Cuprins

PREFAȚĂ .....	3
NOȚIUNI INTRODUCȚIVE .....	6
I. NUMERE APROXIMATIVE .....	13
1.1. ERORI ABSOLUTE ȘI ERORI RELATIVE .....	13
1.2. PROPAGAREA ȘI SURSELE ERORILOR .....	15
1.3. NUMERE CU VIRGULĂ MOBILĂ.....	18
1.4. ARITMETICA VIRGULEI MOBILE ȘI ERORILE DE ROTUNJIRE.....	21
1.5. DETERMINAREA PARAMETRIILOR UNUI SISTEM DE CALCUL.....	24
1.6. EFECTUL ERORILOR DE ROTUNJIRE.....	26
1.6.1. Calculul mediei aritmetice.....	27
1.6.2. Evaluarea recurentă a unei integrale.....	28
1.6.3. Exemple de sisteme rău condiționate.....	30
1.7. EXERCIIII.....	31
II. REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR ALGEBRICE ȘI TRANSCENDENTE.....	34
2.1. INTRODUCERE.....	34
2.2. SEPARAREA RĂDĂCINILOR.....	36
2.3. METODA ÎNJUMĂTĂȚIRII INTERVALULUI.....	43
2.4. METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE.....	45
2.5. CRITERII DE OPRIRE ÎN METODELE ITERATIVE.....	51
2.6. METODA LUI NEWTON (METODA TANGENTEI).....	52
2.7. METODA SECANTEI.....	58
2.8. REZOLVAREA ECUAȚIILOR ALGEBRICE.....	61
2.8.1. Proprietățile ecuațiilor algebrice.....	61
2.8.2. Schema lui Horner.....	63
2.8.3. Metoda lui Newton.....	65
2.9. ALTE METODE NUMERICE.....	68
2.10. EXERCIIII.....	71
III. METODE NUMERICE ÎN ALGEBRA LINIARĂ.....	73
3.1. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATRICEALĂ.....	73
3.1.1. Vectori și matrice.....	73
3.1.2. Norme de vectori și matrice.....	76
3.1.3. Matrice speciale.....	79
3.2. SISTEME DE ECUAȚII ALGEBRICE LINIARE.....	81

3.3.	METODA ELIMINĂRII A LUI GAUSS.....	86
3.4.	FACTORIZAREA LU.....	94
3.5.	FACTORIZAREA CHOLESKY.....	100
3.6.	PERTURBAȚII. NUMĂRUL DE CONDIȚIONARE.....	103
3.7.	CALCULUL VALORILOR ȘI VECTORILOR PROPRII...109	
3.7.1.	Formularea problemei. Proprietăți fundamentale.....	109
3.7.2.	Metode bazate pe transformări de asemănare ortogonală.....	115
3.7.3.	Metoda puterii.....	121
3.8.	METODE ITERATIVE DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE.....	126
3.9.	SISTEME LINIARE SUPRADETERMINATE ȘI METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE.....	134
3.9.1.	Formularea problemei.....	134
3.9.2.	Metode bazate pe sisteme normale.....	135
3.9.3.	Metode de ortogonalizare.....	137
3.10	EXERCIȚII.....	140
IV.	INTRODUCERE ÎN OPTIMIZAREA LINIARĂ.....	144
4.1.	NOȚIUNI DESPRE MULȚIMI ȘI FUNCȚII CONVEXE.....	144
4.1.1.	Mulțimi convexe.....	144
4.1.2.	Funcții convexe.....	149
4.2.	FORMULAREA PROBLEMELOR DE PROGRAMARE LINIARĂ.....	154
4.2.1.	Problema generală de programare liniară.....	155
4.2.2.	Exemple de probleme de programare liniară.....	157
4.2.3.	Forme ale unei probleme de programare liniară.....	161
4.2.4.	Interpretarea geometrică a problemelor de programare liniară cu două variabile.....	164
4.3.	METODA SIMPLEX.....	167
4.3.1.	Soluție admisibilă de bază.....	168
4.3.2.	Criteriul de optimalitate.....	169
4.3.3.	Algoritmul simplex.....	173
4.3.4.	Tabele simplex.....	181
4.3.5.	Determinarea soluției inițiale de bază.....	187
4.4.	DUALITATEA ÎN PROGRAMAREA LINIARĂ.....	190
4.4.1.	Probleme duale simetrice.....	190
4.4.2.	Teoreme duale ale programării liniare.....	191
4.4.3.	Algoritmul simplex dual.....	195
4.5.	REZOLVAREA PROBLEMELOR DE TRANSPORT.....	201

4.5.1.	Preliminarii.....	201
4.5.2.	Determinarea soluției inițiale de bază.....	203
4.5.3.	Metoda potențialelor.....	209
4.6.	PROGRAMAREA LINIARĂ ÎN NUMERE ÎNTREGI.....	220
4.7.	PROGRAMAREA LINIAR-FRAȚIONARĂ.....	229
4.8.	REOPTIMIZAREA ȘI PARAMETRIZAREA ÎN PROGRAMAREA LINIARĂ.....	232
4.8.1.	Modificarea vectorului termenilor liberi.....	234
4.8.2.	Modificarea coeficienților funcției obiectiv.....	236
4.8.3.	Adăugarea unui vector coloană în matricea $A$ .....	238
4.8.4.	Modificarea unui vector coloană al matricei $A$ .....	238
4.8.5.	Adăugarea de noi restricții.....	239
4.9.	EXERCITII.....	240
V.	REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII NELINIARE ȘI A PROBLEMELOR DE OPTIMIZARE NECONDIȚIONATĂ.....	245
5.1.	INTRODUCERE.....	245
5.2.	METODA ITERAȚIEI ȘI METODA GAUSS-SEIDEL NELINIARĂ.....	246
5.3.	METODA NEWTON PENTRU REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII NELINIARE.....	252
5.4.	CONDIȚIILE DE EXTREM ÎN OPTIMIZAREA NECONDIȚIONATĂ.....	256
5.5.	METODA GRADIENTULUI.....	261
5.6.	METODA NEWTON-RAPHSON.....	267
5.7.	METODE CVASI – NEWTON.....	271
5.8.	METODE DE DIREȚII CONJUGATE.....	277
5.8.1.	Considerații preliminare.....	277
5.8.2.	Minimizarea funcțiilor pătratice și rezolvarea sistemelor de ecuații liniare. Algoritmul Hestenes – Stiefel.....	279
5.8.3.	Minimizarea unei funcții strict convexe oarecare.....	
5.8.4.	Algoritmul Fletcher-Reeves și versiunea Polak- Ribiere.....	286
5.9.	EXERCITII.....	287
	RĂSPUNSURI, INDICAȚII.....	291
	BIBLIOGRAFIE.....	297

## PREFATĂ

Metodele de calcul numeric au pătruns eficient în toate domeniile științei, tehnicii și economiei. Cursurile corespunzătoare se predau studenților de la instituțiile de învățământ superior cu profiluri tehnic și economic, matematicienilor și fizicienilor. Lor și le este adresată această lucrare, precum și celor care doresc să se inițieze în aplicarea metodelor numerice și mijloacelor electronice de calcul la rezolvarea problemelor ce se întâlnesc des în practică.

Lucrarea este structurată astfel: o introducere, cinci capitole, o anexă și își propune să prezinte principalele metode numerice de rezolvare a ecuațiilor algebrice și transcendente.

Un loc important îl ocupă rezolvarea numerică a ecuațiilor și a sistemelor de ecuații neliniare, a sistemelor de ecuații liniare și neliniare, a problemelor de optimizare necondiționată și condiționată. Se propun spre soluționare exerciții, rezolvate sau însoțite de indicațiile corespunzătoare.

Pentru înțelegerea materialului de bază sunt suficiente cunoștințele pe care studenții le-au obținut la cursurile de matematici și programare.

În *Noțiuni introductive* sunt expuse primele concepții despre metodele numerice și despre algoritmi de calcul, se fac estimări privind viteza de convergență a acestora.

*Capitolul întâi* este dedicat aproximării numerelor reale prin reprezentări computaționale finite cu ajutorul virgulei mobile și erorilor care le implică. Prin exemple simple se arată că erorile de rotunjire, propagându-se de la o operație aritmetică la alta, ne pot conduce la rezultate eronate.

În *capitolul al doilea* se prezintă metode numerice de calcul al rădăcinilor ecuațiilor algebrice și transcendente.

Este vorba de metoda înjumătățirii intervalului, metoda aproximațiilor succesive, metoda tangentei (Newton), metoda secantei și alte metode numerice. Un loc aparte îl ocupă ecuațiile algebrice, istoria cărora începe cu Evul Mediu și cu Renașterea. Se expun schema lui Horner și metoda Newton de determinare a tuturor rădăcinilor reale ale ecuațiilor algebrice.

*Capitolul al treilea*, destinat metodelor algebrei liniare, pune la îndemâna cititorului atât elemente de analiză matriceală, cât și algoritmi cei mai reprezentativi ce intervin în problemele de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare și de calcul ai valorilor și vectorilor proprii. Sunt expuse metodele directe și iterative de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare (metoda Gauss și metoda Cholesky cu factorizările sale triunghiulare, metoda Jacobi, metoda Gauss-Seidel, metode de ortogonalizare ș.a.), făcându-se totodată aprecieri asupra eficacității și stabilității numerice a acestora. Se subliniază faptul că metodele bazate pe transformări de asemănare ortogonală sunt mai eficiente decât metodele clasice de determinare a valorilor și vectorilor proprii.

În *capitolul al patrulea* se tratează metoda simplex în vederea utilizării acesteia în determinarea soluțiilor optime a problemelor de programare liniară, de programare în numere întregi, de programare liniar-fracționară. Se prezintă problema de transport și se abordează dualitatea în programarea liniară. Tot aici cititorul este familiarizat cu noțiunea de funcție convexă folosită pe larg în următorul capitol al lucrării.

În *capitolul al cincilea* se prezintă principalele metode numerice de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare și a problemelor de optimizare necondiționată. Problema de optimizare se poate reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații și invers. De aceea s-a considerat necesar a expune în cadrul aceluiași capitol metodele menționate. Se



tratează metoda iterației, metoda Gauss-Seidel neliniară, metoda Newton care sunt o extindere a metodelor studiate în capitolele doi și trei. Se aduc condițiile necesare și suficiente de extrem în optimizarea necondiționată. Se face o trecere în revistă a metodei gradientului, metodei Newton-Raphson, metodelor cvasi-Newton și a metodelor de direcții conjugate, punându-se în evidență drept cea mai eficace metoda Fletcher-Powell în versiunea Polak-Ribiere.

*Bibliografia* include referințele în care cititorul poate afla detalii suplimentare asupra metodelor numerice de calcul prezentate în lucrare. Unele date bibliografice au fost incluse chiar în text. Menționăm că din mulțimea cărților scrise în limba română se fac trimiteri doar la acele surse pe care autorul le-a avut la îndemână în timpul scrierii lucrării.

## BIBLIOGRAFIE

1. Brătianu C., Bostan V., Cojocia L., Negreanu G. Metode numerice. Editura tehnică, București, 1996. -212 p.
2. Bucur C. M., Popeea C. A., Simion Gh. Gh. Metode speciale. Calcul numeric. Editura didactică și pedagogică, București, 1983. -232 p.
3. Buzurniuc Șt., Măruș V. Informatică: Elemente de calcul numeric. Editura "Evrice", Chișinău, 2000. -114p.
4. Dinu M., Linga Gh. Algoritmii și tehnici speciale de analiză numerică. Editura MatrixRom, București, 1999. -246p.
5. Iorga V., Jora B., Nicolescu Gr., Lopătan I., Fătu I. Programarea numerică. Editura Teora, București, 1996. -256p.
6. Larionescu D. Metode numerice. Editura tehnică, București, 1989. -224.
7. Măinescu Gh., Rizzoli I., Popescu I., Ștefan C. Probleme de analiză numerică rezolvate cu calculatorul. Editura Academiei Republicii Române, București, 1987. — 264 p.
8. Măruș V. Numere cu virgulă mică. Material didactic. UTM, Chișinău, 1998. – 28p.
9. Măruș V. Metode numerice în algebra liniară. Călugăr prelegeri. UTM, Chișinău, 1995. –80 p.
10. Măruș V., Popescu A. Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare și a problemelor de optimizare necondiționată. Călugăr prelegeri. UTM, Chișinău, 1997. – 88p.
11. Măruș V., Pârțachi I., Berzan R. Introducerea în optimizarea liniară. Editura ASM, 1997. -110 p.
12. Secieru G. V., Secieru I. V., Analiză numerică. Editura Știința, Chișinău, 1985. — 206 p.
13. Șinadici C. Cercetare operațională. Universitatea "A. I. Cuza", Iași, Facultatea de Matematică, 1985. - 654p.
14. Strave P. Metode speciale cu aplicații în economie. Scrisurile noastre, Craiova, 1982. - 547 p.

15. Şabac I. Ch., Cocârlan P., Stănişilă O., Topală A. *Matematici speciale. Vol.II. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.-224 p*
16. Timişanu M., Odăgescu I.M. *Metode numerice şi subrutine. Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.— 215 p*
17. <http://www.amath.unc.edu/Faculty/mitran/papers/metodenumerice.pdf>
18. Бабенко И.С. *Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.— 744 p*
19. Базара М., Шетти К. *Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.-583p. (traducere din limba engleză Bazaraa M.S., Shetty C.M. Nonlinear programming. Theory and algorithms. New York, 1979).*
20. Бахвалов И. С., Жидков И. П., Кобельков Г. *Численные методы. М.: Наука, 1987.— 600 p.*
21. Василиев Ф. П. *Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.-518 p*
22. Воеводин В. В. *Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.— 303 p.*
23. Волков Е. А. *Численные методы. М.: Наука, 1982.— 254 p*
24. Гилл Ф., Муррай У., Райт У. *Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.-509p. (traducere din limba engleză Gill Ph., Murraz M., Wright M. Practical optimization. Academic Press, 1981).*
25. Деннис Дж., Шнэбель Р. *Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.-440p. (traducere din limba engleză Dennis J.E., Schnabel R.B. Numerical methods for un constrained optimization and nonlinear equations. Prentice-Hall, 1983).*
26. Икрамов Х. Д. *Численные методы матричных уравнений. М.: Наука, 1984.— 190 p*
27. Калиткин И. Н. *Численные методы. М.: Наука, 1978. — 512 p*
28. Ланкастер П. *Теория матриц. М.: Наука, 1978. — 280 p. (traducere din limba engleză Lankaster P. Theory of matrices. Academic Press, New-York-London, 1969)*

29. Лоусон Ч, Хенсон Р. Численое решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. — 232 p. (traducere din limba engleză Lawson Ch., Hanson R. *Solving least squares problems. Prentice – Hall, 1974.*
30. МакКракен Д., Дорн У. Численные методы программирования на Фортране. М.: Мир 1977. — 587p. (traducere din limba engleză McCracken D., Dorn W. *Numerical Methods and Fortran Programming, 1965.*
31. Муртаг Б. Современное линейное программирование. Теория и практика. М.: Мир 1984. -224p. (traducere din limba engleză Murtagh B. *Advanced linear programming: computation and practice, 1981.*
32. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир 1983. — 384 p. (traducere din limba engleză Parlett B. *The symmetric eigenvalue problem, 1980.*
33. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. -384p.
34. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. М.: Мир 1984. — 264 p. (traducere din limba engleză Rice John. *Matrix computations and mathematical software, 1981.*
35. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир 1980. — 454 p. (traducere din limba engleză Strang Gilbert. *Linear algebra and its applications, Academic Press, 1976.*
36. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир 1991. -360p. (traducere din limba engleză Schrijver A. *Theory of linear and integer programming 1990.*
37. Фосайт Дж., Малькольм М., Мюллер К.М. и другие. Методы математических вычислений. М.: Мир 1980. - 279 p. (traducere din limba engleză Fosythe G., Malcolm M., Moler C. *Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice-Hall, 1981.*

38. Шуп Т. Е. Прикладные численные методы в физике и технике. М.: Высш. шк., 1990 — 255 p. (traducere din engleză *Shup T. E. Applied Numerical Methods for Microcomputers, Prentice-Hall, 1984*).
39. Хейгман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986. - 448 p. (traducere din limba engleză *Hageman L., Young D. Applied iterative methods. Academic Press, 1987*).
40. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. - 655 p. (traducere din limba engleză *Horn R., Johnson Ch. Matrix analysis. Cambridge University Press, 1986*).