Vasile MORARU
Daniela ISTRATI

ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE

Notes de cours

$$A_k = Q_k R_k, \; A_{k+1} = R_k Q_k$$

Chişinău
2020

UNIVERSITATEA TEHNICĂ
A MOLDOVEI

Départament Informatique et Ingénierie des Systèmes

Maître de conf. dr. Vasile MORARU
Lect. univ. Daniela ISTRATI

ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE

Notes de cours

Editura ”Tehnica-UTM”
2020

CZU 519.6 (075.8)
M 89

Le présent ouvrage montre les principales méthodes de calcul numérique matriciel pour résoudre les problèmes qui peuvent être rencontrés fréquemment dans la pratique.

Cet ouvrage est destiné premièrement aux étudiants de la spécialité 0613.1 Technologie de l'information, Filière Francophone « Informatique » et apportera un soutien efficace sur l'enseignement des cours *Méthodes et modèles informatiques, méthodes numériques, mathématiques computationnelles, modèles mathématiques et optimisations,* etc.

Cependant, le livre peut également être utilisé par tous ceux qui s'intéressent à l'utilisation de méthodes numériques et des moyens électroniques de calcul pour résoudre des problèmes pratiques.

Auteurs : maître de conf,, dr. Vasile Moraru,
lect. univ. Daniela Istrati

Responsable d'édition - prof. univ., dr. hab. Emilian Guțuleac
Aviz – maître de conf. Liviu Carcea

DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII

Moraru, Vasile.

Analyse numérique matricielle: Notes de cours / Vasile Moraru, Daniela Istrati; redactor-responsabil: Emilian Guțuleac; Universitatea Tehnică a Moldovei, Departamentul Informatică și Ingineria Sistemelor. Chişinău: Tehnica-UTM, 2020. – 96 p.

Bibliogr.: p. 94-95 (12 tit). – 50 ex.

ISBN 978-9975-45-646-3.

519.6(075.8)

M 89

Bun de tipar 07.07.20 Comanda nr. 54

2004, UTM, Chişinău, bd. Ştefan cel Mare și Sfânt, 168
Editura"Tehnica-UTM"
2045, Chişinău, str. Studenţilor, 9/9

ISBN 978-9975-45-646-3

Préface

Le matériel présenté dans cet ouvrage inclut les méthodes de l'algèbre linéaire et présente des éléments de l'analyse matricielle, les algorithmes les plus représentatifs qui interviennent dans les problèmes de résolution des systèmes des équations linéaires et de calcul des valeurs et des vecteurs propres.

Dans cette élaboration méthodique sont exposées les méthodes directes et itératives de résolution des systèmes des équations linéaires (méthode d'élimination de Gauss, méthode de Cholesky avec ses factorisations triangulaires, méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Seidel, méthodes d'orthogonalisation etc.), en faisant simultanément des appréciations sur l'efficacité et la stabilité numérique de celles-ci. On souligne le fait que les méthodes basées sur des transformations de ressemblance orthogonales sont plus efficaces que les méthodes classiques de détermination des valeurs et des vecteurs propres.

Cet ouvrage est destiné premièrement aux étudiants de la spécialité 0613.1 Technologie de l'information, Filière Francophone "Informatique" et apportera un soutien efficace sur l'enseignement des cours *Méthodes et modèles de calcul, méthodes numériques, mathématiques computationnelles, modèles mathématiques et optimisations*, etc.

Cependant, le livre peut également être utilisé par tous ceux qui s'intéressent à l'utilisation de méthodes numériques et des moyens électroniques de calcul pour résoudre des problèmes pratiques.

Cet ouvrage est réalisé avec le support de lAgence Universitaire de la Francophonie dans le cadre du projet **AUF - Pentalog CHI, ATIC - IUT Rouen -UTM,** *"Première formation universitaire francophone à présence renforcée en entreprise en République de Moldova".*

1. Notions introductives

Les méthodes de calcul numérique sont devenues à l'époque actuelle, très importantes. On les applique quasi partout : dans l'ingénierie et dans l'économie, dans les mathématiques et dans la physique, dans la médicine, dans l'astronomie, dans la chimie, dans la géologie etc. C'est tant grâce aux progrès obtenus dans le domaine des ordinateurs qu'aux expériments de plus en plus compliqués dans le modelage mathématique.

Par *méthodes numériques* on sous-entend des méthodes de résolution des problèmes à l'aide des opérations au caractère arithmétique et logique sur les nombres réels, donc à l'aide des opérations qui peuvent être exécutées automatiquement par un ordinateur.

La résolution d'un problème imposé par la pratique commence par la construction du *modèle mathématique*. Le modèle mathématique représente la formulation mathématique du problème énoncé, donc constitue l'expression mathématique des relations et des restrictions d'entre les paramètres du problème.

Après la formulation mathématique du problème on réalise *le choix de la méthode numérique* et *on élabore l'algorithme de calcul*. Ces étapes sont les plus importantes dans le processus de résolution des problèmes. Au choix de la méthode numérique on prend en considération la vitesse de convergence, la précision, la stabilité, le temps d'exécution et le nécessaire de mémoire.

L'algorithme de la méthode numérique consiste d'un nombre limité d'opérations arithmétiques et logiques, qui doivent être effectuées par l'ordinateur pour la résolution du problème donné. Les règles de calcul forment les pas de l'algorithme.

Soulignons le fait que la notion d'algorithme dans sa forme générale se situe parmi les notions fondamentales des mathématiques et est à la base de la programmation des ordinateurs.

Chaque algorithme est caractérisé par les propriétés suivantes :

a) *Généralité*. Cela signifie que l'algorithme doit non seulement résoudre un problème, mais également tous les problèmes de la classe respective de problèmes.
b) *Finitude*. Le nombre des transformations intermédiaires, appliqué aux données d'entrée pour obtenir les données de sortie, est fini.
c) *Unicité*. Toutes les transformations intermédiaires doivent être déterminées sans équivoque des règles de l'algorithme.

Après l'élaboration de l'algorithme de la méthode numérique de calcul on passe à l'écriture du programme de résolution du problème dans un langage de programmation. Puis on passe *au test et la vérification du programme*. Après qu'on teste le programme du point de vue syntaxique, il est nécessaire que le programme soit vérifié par des exemples des problèmes concrets dont les solutions sont connues.

Par conséquence, la résolution d'un problème à l'ordinateur nécessite le parcours des étapes suivantes :

1. énoncé du problème et l'expression mathématique, en soulignant ce qui est donné et ce qui est requis;
2. choix d'une méthode numérique pour obtenir la solution;
3. élaboration de l'algorithme de calcul;
4. écriture du programme de calcul;
5. test et vérification du programme;
6. analyse des résultats obtenus.

La majorité des méthodes de calcul représente des processus itératifs. Cela veut dire que, ayant un x_0 donné, on construit une suite: $x_0, x_1, \dots \dots x_n \dots$ (notée comme d'habitude $\{x_n\}$ qui dans certaines conditions converge vers la solution exacte x_i du problème considéré. Les éléments $x_n, n = 0,1,2, \dots$, peuvent être aussi des nombres réels que des vecteurs ou des matrices.

Dans les méthodes numériques comme *critère de stoppage* des itérations comme d'habitude est utilisé le suivant : la suite $\{x_n\}$ est tronquée à un indice m déterminé pendant le processus de calcul,

TABLE DE MATIERES

BIBLIOGRAPHIE

1. Brătianu C., Bostan V., Cojocia L., Negreanu G. Metode numerice. Editura tehnică, Bucureşti,1996. -212 p.
2. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. — 303 p.
3. Икрамов Х. Д. Численое решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. — 190 p.
4. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. — 280 p. (traducere din limba engleză *Lankaster P. Theory of matrices. Academic Press, New-York-London, 1969*)
5. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численое решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. — 232 p. (traducere din limba engleză *Lawson Ch., Hanson R. Solving least squares problems. Prentice – Hall, 1974*).
6. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983. — 384 p. (traducere din limba engleză *Parlett B. The symmetric eigenvalue problem, 1980*).
7. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. М.: Мир, 1984. — 264 p. (traducere din limba engleză *Rice John. Matrix computations and mathematical software, 1981*).
8. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980. — 454 p. (traducere din limba engleză *Strang Gilbert. Linear algebra and its applications,Academic Press, 1976*).
9. Форсайт Дж., Малькольи М., Моулер К., Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. - 279 p. (traducere din limba engleză *Fosythe G., Malcolm M., Moler C. Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice-Hall, 1982*).
10. Хейгман Л. , Янг Д. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986. - 448 p. (traducere din limba engleză *Hageman L., Young D. Applied iterative methods. Academic Press, 1981*).

11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. - 655 p. (traducere din limba engleză *Horn R., Johnson Ch. Matrix analysis. Cambridje University Press, 1986*).
12. Malbos Philipe. Analyse matricielle et algèbre linéaire appliquée. Notes de cours et de travaux dirigés. Université Claude Bernard Lyon 1. http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/malbos/Ens/amalaa11.pdf