COORDONATELE POLARE ŞI SFERICE

Andrei MOŞANU, grupa E - 161

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *The paper focuses on the polar and spherical coordinate systems. The first part is a synthesis presenting a short history of the polar coordinates and several applications of these: graphs in polar coordinates, surface area of shapes, arc length of a line, etc. It also introduces the cylindrical coordinates system. The second part, which focuses on the spherical coordinates, shows how to build an algorithm that finds the shortest distance between two points on a sphere. As an example, the distance between Chisinau and several other cities is calculated based on their spherical coordinates only.*

Cuvinte cheie: *coordonate polare, sferice şi geografice; produsul scalar.*

Sistemul cartezian de coordonate, introdus de savantul francez R. Decart (Rene Descartes, 1596 – 1650) în sec. XVII, a însemnat, pentru matematică, începutul unei noi etape de dezvoltare. Fiind foarte simplu, acest sistem este cunoscut astăzi oricărui elev de gimnaziu. Ideea de bază a sistemului a fost determinarea oricărui punct din plan printr-o pereche ordonată de numere reale. Astfel, studiul multor obiecte de natură geometrică a fost redus la studiul unor noţiuni pur algebrice şi invers.

În acelaşi timp, există un şir de probleme, inclusiv în matematică, pentru rezolvarea cărora sistemul cartezian este incomod, greoi sau chiar inaplicabil. De exemplu, una din liniile, cunoscute încă de grecii antici, *spirala lui Arhimede*, nu mai poate fi studiată printr-o ecuaţie în sistemul cartezian. În asemenea cazuri se apelează la un alt sistem de coordonate – sistemul polar, care vine să-l completeze pe cel cartezian.

Sub forma actuală, coordonatele polare au fost elaborate pe la mijlocul secolului 17 imediat după coordonatele carteziene ale lui Decart, de italienii *Gregoire de Saint-Vincent* şi *Bonaventura Cavalieri*. Puţin mai târziu, Blaise Pascal (1623 – 1662) foloseşte coordonatele polare pentru calculul arcelor parabolice. Iakob Bernoulli foloseşte un sistem cu un punct pe o linie, pe care le numeşte *pol*, respectiv *axă polară*. În sfârşit, termenul efectiv *coordonate polare* îi este atribuit lui *Gregorio Fontana*.

Sistemul polar de coordonate constă dintr-o singură axă numerică, numită *axa polară*, originea căreia se numeşte *pol*. Oricare punct *M* din plan determină două numere ρ şi θ, unde $\rho = OM$, iar θ estre unghiul dintre segmentul *OM* şi axa polară (Fig. 1). Se notează: $M(\rho,\theta)$. Numărul ρ se numeşte *raza polară* a punctului *M*, iar θ *unghiul polar* al acestui punct.

Legătura dintre coordonatele carteziene (x, y) şi cele polare (ρ,θ) se stabileşte destul de simplu. Dacă cele două sisteme sunt suprapuse astfel încât axa polară coincide cu axa absciselor, iar polul – cu originea, atunci

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta. \tag{1}$$

De remarcat, că ρ este unic, iar θ este determinat cu exactitatea 2π.

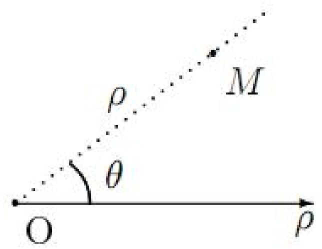

Figura 1 Axa polară

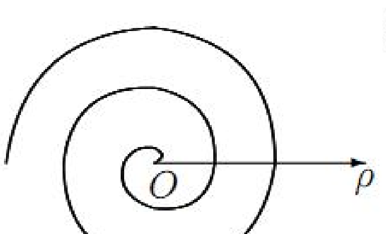

Figura 2 Spirala lui Arhimede

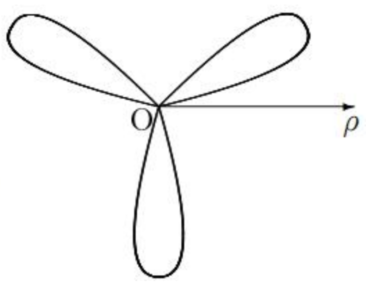

Figura 3 *Roza cu 3 petale*

Sistemul polar are un şir de aplicaţii.

1. *Grafice.* Dacă ρ este funcţie de argument θ, $\rho = \rho\ (\theta)$, această funcţie îşi are graficul ei în siste-mul polar. De exemplu, spirala lui Arhimede (Fig. 2) este graficul funcţiei $\rho = \theta$.

Pentru a construi graficul funcţiei $\rho = a\sin 3\theta$, unde $a > 0$, se mai constată unele proprietăţi ale ei. Funcţia este periodică cu perioada 120°. Prin urmare, e suficient de examinat funcţia pe intervalul $[0,120^\circ]$. Funcţia e definită pentru $\sin 3\theta \geq 0$, adică pentru $0 \leq \theta \leq 60^\circ$. Pentru $\theta \in (60^\circ,120^\circ)$ funcţia nu are sens. Valoarea maximă a funcţiei se obţine pentru $\sin 3\theta = 1$, adică pentru $\theta = 30^\circ$; în acest caz $\rho(30^\circ) = a$. Dând un şir de valori ale argumentului θ, se calculează valorile respective ale funcţiei $\rho = \rho(\theta)$. Pentru aceste valori se construiesc, în sistemul polar, punctele respective. Unindu-le cu o curbă lină, se construieşte graficului funcţiei în intervalul $[0,60^\circ]$. Acest fragment de grafic se va construi şi în intervalele $[120^o,180^o]$, $[240^\circ,300^\circ]$. Întregul grafic al funcţiei este reprezentat în Fig. 3 şi se numeşte *roza cu 3 petale*.

3. *Aria figurii.* Sectorul curbiliniu (Fig. 4) este o figură, mărginită de graficul funcţiei $\rho = \rho\ (\theta)$ şi de două semidrepte $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$. Pentru funcţia $\rho = \rho(\theta)$ se alcătuiesc, într-un anumit mod, sumele integrale, care conduc la formula de calculare a ariei sectorului curbiliniu:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\,\theta \qquad (2)$$

În două exemple se poate vedea cum poate fi aplicată această formulă.

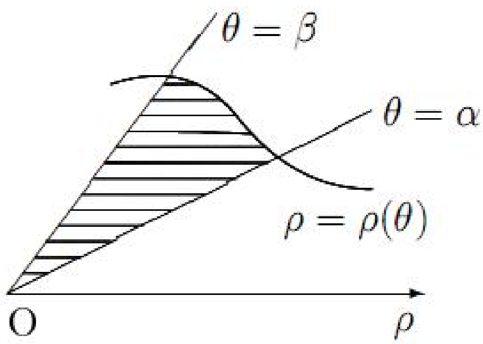

Figura 4 Sectorul curbiliniu

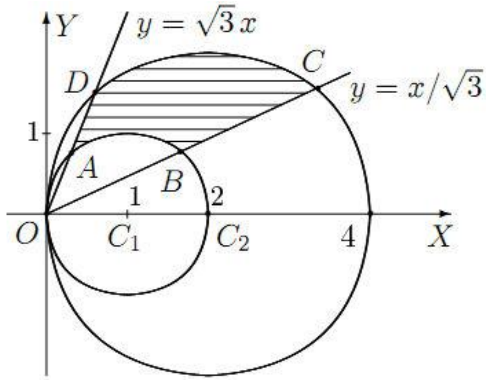

Figura 5 Aria figurii, mărginite de cercuri şi drepte

Exemplul 1. Pentru a calcula aria figurii, mărginite de roza cu trei petale $\rho = a\sin 3\theta$ (Fig. 3), se aplică nemijlocit formula (2). Evident, aria unei petale constituie o treime din aria întregii figuri. Pentru prima petală, $0 \leq \theta \leq \pi/3$. Conform formulei (2), aria întregii figuri,

$$A = 3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} a^2\sin^2 3\theta\, d\theta = \frac{3}{2}a^2\int_0^{\pi/3}\frac{1-\cos 6\theta}{2}d\theta = \frac{3a^2}{4}\left(\theta - \frac{1}{6}\sin 6\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/3} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Exemplul 2. Pentru a calcula aria figurii, mărginite de cercurile $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 4x + y^2 = 0$ şi de dreptele $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}\,x$ (Fig. 5, partea haşurată), coordonatele carteziene conduc la calcule greoaie, deci sunt ineficiente. De aceea, se trece la coordonate polare, conform formulelor (1). În coordonate polare, primele două ecuaţii capătă forma $\rho = \rho_1(\theta) = 2\cos\theta$ (pentru cercul mic) şi $\rho = \rho_2(\theta) = 4\cos\theta$ (pentru cercul mare). Dreptele au pantele $1/\sqrt{3}$ şi $\sqrt{3}$, ceea ce determină ecuaţiile razelor polare: $\theta = \alpha = \pi/6$ şi $\theta = \beta = \pi/3$. Exprimând ariile celor două sectoare curbilinii prin integrale, conform formulei (2), aflăm aria figurii:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(16\cos^2\theta - 4\cos^2\theta\right)d\theta = 6\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos^2\theta\, d\theta = 3\int_{\pi/6}^{\pi/3}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

3. *Lungimea liniei,* de asemenea poate fi calculată în sistemul polar. Modulul şi argumentul unui număr complex *z* sunt exact coordonatele polare ale imaginii geometrice ale lui *z*. În forma trigonometrică, nume-rele complexe se ridică simplu la orice putere (formula lui Moivre). De asemenea, la extragerea rădăcinii de orice ordin *n* dintr-un număr complex în forma trigonometrică, se obţin exact *n* valori ale acestor rădăcini.

2. Coordonatele cilindrice. Fie $M(x,y,z)$ un punct arbitrar din sistemul cartezian $OXYZ$ şi P proiecţia lui pe planul XOY (Fig. 6). Dacă (ρ , θ) sunt coordonatele polare ale lui P, atunci punctul M este determinat şi de alte trei numere ρ , θ , z, care constituie *coordonatele cilindrice* ale punctului M: $M(\rho , \theta ,z)$. Legătura dintre coordonatele carteziene şi cele cilindrice este evidentă:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z. \qquad (3)$$

Trecerea de la coordonatele carteziene la cele cilindrice se aplică, de exemplu, la calcularea unor integrale triple.

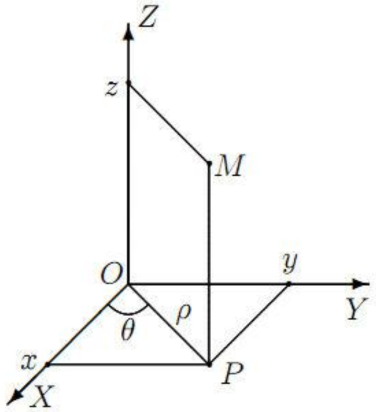

Figura 6 Coordonatele cilindrice

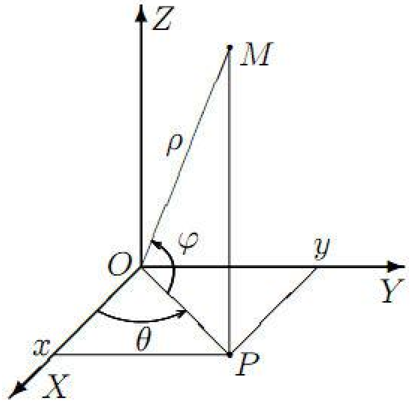

Figura 7 Coordonatele sferice

3**. Coordonatele sferice.** Fie $M(x,y,z)$ un punct arbitrar din sistemul cartezian $OXYZ$ şi P proiecţia lui pe planul XOY. Poziţia punctului P poate fi determinată şi de alte trei numere, ρ , θ , φ. În acest caz, $\rho = OM$, θ este unghiul dintre segmentul OP şi axa OX, iar φ este unghiul dintre OM şi planul XOY (Fig. 7). Numerele ρ , θ , φ constituie *coordonatele sferice* ale punctului M: $M(\rho , \theta , \varphi)$. Legătura dintre coor-donatele carteziene şi cele sferice se stabileşte cu uşurinţă:

$$x = \rho \cos\varphi \cos\theta, \quad y = \rho \cos\varphi \sin\theta, \quad z = \rho \sin \varphi. \qquad (4)$$

Ca şi coordonatele cilindrice, cele sferice se aplică, de exemplu, la calcularea unor integrale triple. Un inte-res deosebit îl prezintă modelul coordonatelor sferice în geografie – *coordonatele geografice.*

Se ştie, că suprafaţa Pământului nu este o sferă perfectă, ci e turtită la poli. Raza Pământului în planul ecuatorului este de 6378 km, iar de la centrul planetei până la fiecare pol ea este de 6357 km. Vom ad-mite, totuşi, că Pământul este o sferă perfectă cu raza $R = 6367$ km. În majoritatea problemelor, legate de coordonate, eroarea care s-ar obţine este nesemnificativă. Vom considera că sistemul cartezian XOY are originea în centrul Pământului, axa OZ e orientată spre polul nord. Atunci intersecţia planului de coordonate XOY cu suprafaţa Pământului va coincide cu ecuatorul. Axa OX va fi orientată spre punctul de intersecţie a ecuatorului cu meridianul Greenwich. Acest meridian a fost ales ca meridian 0 în anul 1884 la o conferinţă internaţională a geografilor. El trece prin localitatea Greenwich, situată în apropierea Londrei, unind cele două poluri ale Pământului.

Oricare punct de pe suprafaţa Pământului este determinat de două coordonate θ şi φ, a treia coordonată fiind constantă: $\rho = R = 6367$ km.

Valorile lui θ se vor depune de la meridianul 0: cu semnul "+" spre est (longitudinea estică) şi cu semnul "-" spre vest (longitudinea vestică). Astfel, $-180^o \le \theta \le 180^o$. Valorile unghiului φ se depun de la ecuator: cu semnul "+" spre nord (latitudinea nordică) şi cu semnul "-" spre sud (latitudinea sudică). Astfel,
$-90^o \le \varphi \le 90^o$.

Pentru două puncte de pe suprafaţa sferică, distanţa cea mai scurtă nu este lungimea segmentului ce le uneşte, ci lungimea celui mai mic arc, obţinut la intersecţia suprafeţei sferice cu planul, ce trece prin cele două puncte şi centrul Pământului. Vom expune o metodă de calculare a acestei distanţe.

Fie $M_1(\theta_1, \varphi_1)$ şi $M_2(\theta_2, \varphi_2)$ două puncte arbitrare pe suprafaţa sferei. Conform formulelor (4), se află coordonatele lor carteziene. Fie $M_1 (x_1,y_1,z_1)$, $M_2 (x_2,y_2,z_2)$. Se examinează vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} = (x_1,y_1,z_1)$ şi $\overline{b} = \overrightarrow{OM_2} = (x_2,y_2,z_2)$ (Fig. 8) cu produsul scalar $\overline{a}\ \overline{b} = x_1 x_2+y_1y_2+z_1z_2$. Considerând, pentru început, că raza sferei este egală cu 1, avem $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$. Fie γ unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, iar $\cos\gamma = c$. Atunci

$\gamma = \arccos c$. Cunoscând unghiul γ şi revenind la raza sferei egală cu R, se află lungimea arcului căutat: $M_1M_2 = \gamma R$.

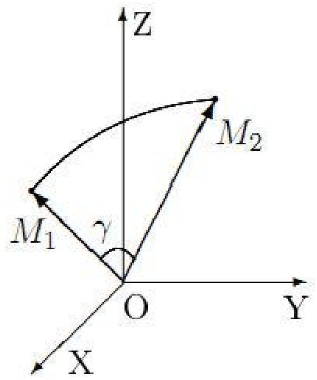

Figura 8

În calitate de exemplu, se va aplica acest algoritm pentru a afla distanţele dintre Chişinău şi oraşele Paris, Roma, Washington şi Sydney.

Pentru Chişinău, longitudinea estică, $\theta = 28°55'$, iar latitudinea nordică, $\varphi = 47°$. În coordonate carte-ziene, $x = 0{,}596969,\ y = 0{,}329771,\ z = 0{,}731354$.

Pentru Paris, $\theta = 2°21'03''$, $\varphi = 48°51'24''$ iar coordonatele carteziene, $x = 0{,}657391$, $y = 0{,}026988$, şi $z = 0{,}753066$. Pentru unghiul dintre razele, ce unesc centrul Pământului cu cele două oraşe, se află $\gamma = =0{,}310765$ (radiani). Distanţa cea mai mică dintre Chişinău şi Paris se obţine egală cu 1984,856 km. Distanţa exactă este egală cu 1977,82 km [2]. Eroarea relativă constituie 0,36%.

În mod asemănător, se află distanţele dintre Chişinău şi oraşele Roma, Washington şi Sydney. Rezultatele se conţin în tabela de mai jos.

	Oraşul	*Longitud.* θ	*Latitud.* φ	*Coordonatele carteziene*	*Unghiul* γ	*Dist.calc. (km)*	*Dist.ex. (km)*	*Er.r. (%)*
1.	Chişinău	28°55′ (E)	47° (N)	x=0,596969; y=0,329771; z=0,731354.	*0*	*0*	*0*	*0*
2.	Paris	2°21′03" (E)	48°51′24" (N)	x=0,657391; y=0,026988; z=0,753066.	0,310765	1984,856	1977,82	0,36
3.	Roma	12°30′ (E)	41°54′ (N)	x=0,726669; y=0,161099; z=0,667833.	0,222508	1421,158	1415,85	0,37
4.	Washington	77°00′59" (W)	38°54′17" (N)	x=0,174838; y=-0,758296; z=0,628027.	1,251794	7995,208	7981,27	0,17
5.	Sydney	151°12′34" (E)	33°51′54" (S)	x=-0,727710; y=0,399905; z=-0,557238.	2,36041	15075,938	15059,34	0,11

Bibliografie

1. Piskunov, N.S. *Calcul diferenţial şi integral. Vol. 1.* Chişinău, Ed. Lumina, 1992.
2. www. *Distancecalculator.net*.