# Сильно нелинейные колебания линейного осциллятора

Наталья Сергеевна Штацкая[1] , Петр Иванович Хаджи[2,3]

1. Тираспольская гуманитарно-математическая гимназия,

Молдова, Тирасполь, пер. Бочковского 2,3300,e-mail: natali_novickaya@mail.ru

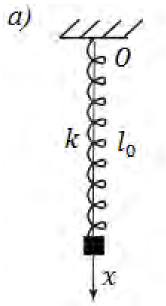
2.Приднестровский государственный университет им.Т.Г.Шевченко,

Молдова, Тирасполь, ул. 25 Октября 128, 3300

3. Институт прикладной физики Академии наук Молдовы,

Молдова, Кишинев, ул. Академическая 5

Простой пружинный маятник состоит из грузика массой $m$, прикрепленного к свободному концу невесомой пружинки с коэффициентом упругости $k$, второй конец которой неподвижно закреплен в точке $O$ (рис.1$a$).




Маятник расположен на абсолютно

**Рис. 1**. а) Пружинный маятник в режиме продольных колебаний вдоль оси пружинки Ox.

гладком горизонтальном столе. В положении равновесия пружинка недеформирована и имеет длину $l_0$. При небольшом смещении $x(x \ll l_0)$ грузика из положения равновесия вдоль оси пружинки $Ox$ в системе возникает возвращающая сила $\vec{F} = -k\vec{x}$, пропорциональная величине смещения $x$ и направленная в сторону, противоположную смещению. Под действием этой силы маятник, предоставлый самому себе, совершает линейные, гармонические колебания вдоль оси $Ox$ с частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, которые описываются зависящей от времени $t$ функцией $x = x_0 cos\omega_0 t$ , где $x_0$ - начальное смещение грузика из положения равновесия. Частота колебаний $\omega_0$ определяется только массой грузика $m$ и коэффициентом упругости $k$ пружинки и не зависит от начальных условий. В этой модели пружинного маятника колебания (смещения) грузика происходят вдоль оси пружинки и в этом смысле мы назовем их продольными колебаниями.

Вместе с тем, большой интерес представляет исследование возможности существования нелинейных колебаний линейного пружинного маятника, не связанные с поправкой к коэффициенту упругости $k$ при больших смещениях грузика из положения равновесия, зависящей от смещения $x$. Мы по-прежнему считаем, что коэффициент упругости пружинки $k$ является постоянным, не зависящим от смещения грузика.

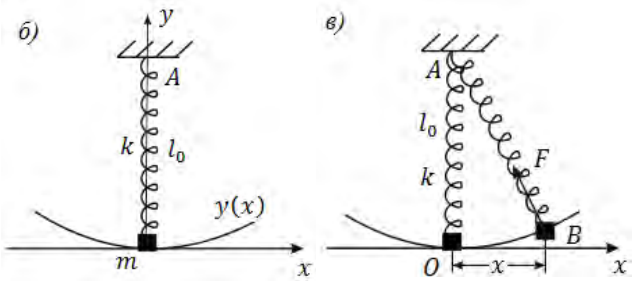



**Рис. 1.** Пружинный маятник в режиме поперечных колебаний вдоль параболической направляющей $y(x)$ б) в положении равновесия и в) при перемещении из положения

Оказывается, такая возможность реализуется при наложении дополнительных условий на направление движения грузика. Мы предполагаем, что грузик маятника перемещается без трения вдоль криволинейной направляющей, проходящей через точку $O(0,0)$ (рис.1 *б,в*).

На рис.1 *б,в* представлен маятник в положении равновесия и при отклонении от положения равновесия соответственно. Мы считаем, что направляющая имеет параболическую форму и описывается уравнением $y = x^2/(2l_0)$ , где $x$ - проекция смещения грузика на ось $Ox$, перпендикулярная оси пружинки $Oy$. Другим концом пружинка крепится неподвижно в точке $A(0, l_0)$.

Будем рассматривать малые колебания маятника в рамках линейного закона Гука, критерием справедливости которого является неравенство: $x \ll l_0$. При смещении грузика из точки $O(0,0)$ в точку $B(x, x^2/(2l_0))$ пружинка удлиняется на величину $\Delta l = l - l_0$, где $l$ - длина деформированной пружинки в положении $BA$, равная $l = \sqrt{(l_0 - x^2/(2l_0))^2 + x^2}$. При этом в пружинке возникает сила упругости $F = k \cdot \Delta l = kl_0(\sqrt{1 + x^4/(4{l_0}^4)} - 1)$ . Раскладывая выражение для силы упругости в ряд по малой переменной $(x/(2l_0))^2$ , получаем $F = kx^4/(8{l_0}^3)$. Проекция $F_x$ этой силы на ось $Ox$ является возвращающей силой, действующей на грузик. Она определяется выражением

$F_x = F \cdot x/l_0 = kx^5/(8{l_0}^4)$. (1)

Отсюда видно, что возвращающая сила $F_x$ пропорциональна пятой степени смещения $x$ из положения равновесия и также направлена в сторону, противоположную смещению. Возвращающая сила является существенно нелинейной, хотя она и получена в рамках справедливости линейного закона Гука для пружинки. Нелинейность в этом случае не связана с отклонением от линейного закона Гука при увеличении деформации пружинки, а обусловлена только геометрией задачи, то есть тем, что направление движения грузика перпендикулярно направлению оси пружинки, находящейся в положении равновесия (рис.1*в*). Поэтому полученная нелинейность может быть названа геометрической нелинейностью.

Используя второй закон Ньютона, можно записать уравнение, описывающее динамику грузика:

$m\ddot{x} + k/(8{l_0}^4) \cdot x^5 = 0$. (2)

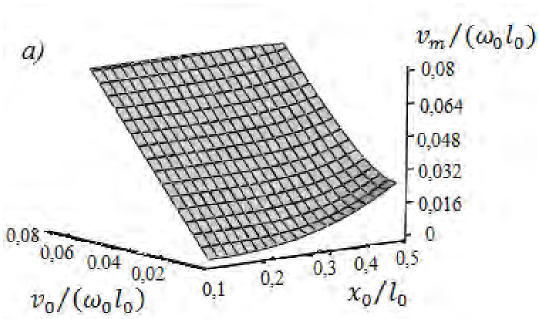
Это уравнение не содержит линейного по смещению слагаемого. Поэтому его решения не будут обладать предельным переходом к линейному маятнику. Нелинейность полностью определяет движение грузика даже при сколь угодно малых смещениях из положения равновесия.

Первый интеграл движения уравнения (2) имеет вид: $m\dot{x}^2/2 + kx^6/(48{l_0}^4) =$

$m{v_0}^2/2 + k{x_0}^2/(48{l_0}^4)$, (3)

где $x_0$ и $v_0$ – начальные смещение и скорость грузика соответственно. Выражение (3) представляет собой закон сохранения энергии: сумма кинетической и потенциальной энергий маятника сохраняется. Здесь

$\Pi = kx^6/(48{l_0}^4)$ (4)



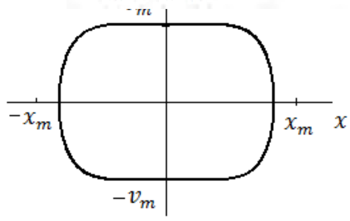




**Рис.2.** График зависимости скорости грузика $v$ от смешения $x$.

является потенциальной энергией нелинейного осциллятора. Вводя частоту колебаний линейного осциллятора ${\omega_0}^2 = k/m$, выражение (3) можно записать виде

$v^2 + {\omega_0}^2 x^6/(24{l_0}^4) = {v_0}^2 + {\omega_0}^2 {x_0}^6/(24{l_0}^4)$, (5)

где $v = dx/dt$ - скорость движения грузика. На рис.2 представлена зависимость скорости движения $v$ от смещения $x$.

Видно, что имеет место заметное искажение зависимости $v(x)$ по сравнению с аналогичной кривой в линейном режиме.Сскорость изменяется в пределах от $-v_m$ до $+v_m$ , а смещение – от $-x_m$ до $+x_m$ , где $v_m$ и $x_m$ максимальные значения скорости и смещения грузика соответственно, которые выражаются формулами

$${x_m}^6 = {x_0}^6 + 24{l_0}^4{v_0}^2/{\omega_0}^2,$$
$${v_m}^2 = {v_0}^2 + {\omega_0}^2{x_0}^6/(24{l_0}^4). \quad (6)$$

Величины $v_m$ и $x_m$ определяются начальными значениями скорости $v_0$ и смещения $x_0$ , а также параметрами маятника $\omega_0$ и $l_0$ . Между величинами $v_m$ и $x_m$ существует нелинейная связь: $v_m = \omega_0 {x_m}^3/(2\sqrt{6}{l_0}^2)$ . На рис.3 *а,б* представлены графики зависимости максимальной скорости $v_m/(\omega_0 l_0)$ и максимального смещения $x_m/l_0$ от начальной скорости $v_0/(\omega_0 l_0)$ и начального смещения $x_0/l_0$. Видно, что $v_m$ и $x_m$ монотонно растут с ростом $v_0$ и $x_0$.

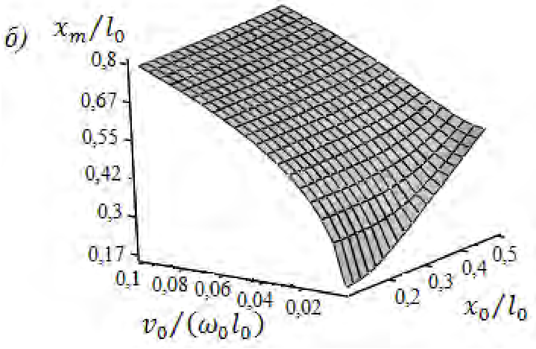



**Рис.3.** Зависимость *а)* максимальной скорости $v_m$ и *б)* максимального смещения $x_m$ от начального смещения и начальной скорости.

Из рис.2 видно, что связь между $v$ и $x$ представляется в виде замкнутой кривой. Поэтому колебания маятника, как и в линейном случае, являются периодическими. Решение уравнения (2) при начальных условиях $x_0 \neq 0, v_0 = 0$ представляется в виде

$$x = x_0 \frac{cn(\sqrt[4]{3}\tau)}{\sqrt{cn^2(\sqrt[4]{3}\tau)+\sqrt{3}sn^2(\sqrt[4]{3}\tau)dn^2(\sqrt[4]{3}\tau)}}, \qquad (7)$$

где $\tau = t\tau_0{}^{-1}$, $\tau_0{}^2 = 24 l_0{}^4/(\omega_0{}^2 x_0{}^4)$, $cn\varphi, sn\varphi, dn\varphi$ - эллиптические функции Якоби с модулем $p$ [1,2], равным $p^2 = 1/2 \cdot (1-\sqrt{3}/2)$. Следовательно, смещение $x$ периодически изменяется с периодом $T$, равным

$$T = 8\sqrt{6}/\sqrt[4]{3} \cdot l_0{}^2/(\omega_0 x_0{}^2) \cdot K(p), \qquad (8)$$

где $K(p)$ - полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $p$ [1,2].

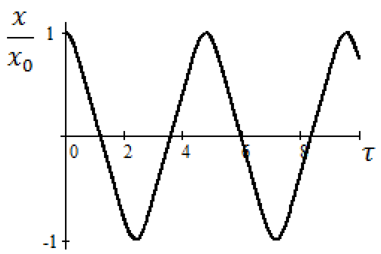



**Рис.4**. Зависимость смещения грузика от времени.

На рис.4 представлены колебания грузика относительно положения равновесия $x = 0$ в зависимости от времени. Соответственно периодически изменяются как скорость $v(t)$, так и ускорение $\ddot{x}(t)$. Из (8) видно, что период колебаний определяется начальным смещением $x_0$ грузика и длиной $l_0$ недеформированной пружинки. Если сравнить период поперечных колебаний $T$ с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$ продольных линейных колебаний, то находим

$$T/T_0 = 4\sqrt{6}/(\sqrt[4]{3}\pi) \cdot (l_0/x_0)^2 K(p). \qquad (9)$$

На рис.5 представлена зависимость отношения $T/T_0$ от начального смещения грузика $x_0$. При уменьшении $x_0$ период быстро растет и обращается в бесконечность при $x_0 \to 0$.

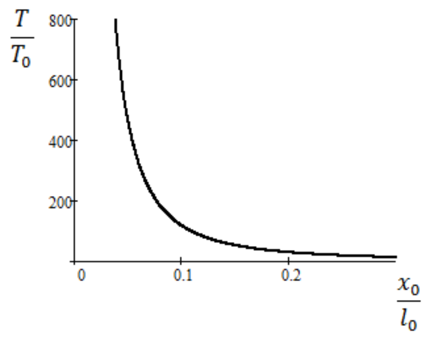



**Рис.5**. Зависимость периода колебаний $T$ маятника от начального смещения грузика.

Решение уравнения (3) при начальных условиях $x_0 = 0$, $v_0 \neq 0$ имеет вид

$$x = x_m \cdot \frac{sn(\sqrt[4]{3}\tau)dn(\sqrt[4]{3}\tau)}{\sqrt{(\sqrt{3}cn^2(\sqrt[4]{3}\tau)+sn^2(\sqrt[4]{3}\tau)dn^2(\sqrt[4]{3}\tau))}}, \qquad (10)$$

где $\tau = t\tau_0{}^{-1}$, $\tau_0 = 2\sqrt{6} l_0{}^2/(\omega_0 x_m{}^2)$, $x_m{}^6 = 24 l_0{}^4 v_0{}^2/\omega_0{}^2$, модуль эллиптических функций $p^2 = 1/2 \cdot (1-\sqrt{3}/2)$. Отсюда также видно, что смещение маятника периодически изменяется со временем с периодом $T$, равным

$$T = 8\sqrt{6}/\sqrt[4]{3} \cdot l_0{}^2/(\omega_0 x_m{}^2) \cdot K(p), \qquad (11)$$

где $x_m$ - максимальное смещение грузика из положения равновесия. Период колебаний маятника зависит от начальной скорости $v_0$ грузика пропорционально $v_0{}^{-2/3}$, то есть период монотонно убывает с ростом $v_0$. Таким образом, из (9) и (11),следует что период колебаний грузика обращается в бесконечность при $x_0 \to 0$ и $v_0 \to 0$.

В общем случае, при $x_0 \neq 0$ и $v_0 \neq 0$, решение уравнения (3) имеет вид

$$x = x_m \frac{sn(\sqrt[4]{3}\tau \pm c)dn(\sqrt[4]{3}\tau \pm c)}{\sqrt{\sqrt{3}cn^2(\sqrt[4]{3}\tau \pm c)+sn^2(\sqrt[4]{3}\tau \pm c)dn^2(\sqrt[4]{3}\tau \pm c)}}, \qquad (12)$$

где $\tau = t\tau_0{}^{-1}$, $\tau_0 = 2\sqrt{6} l_0{}^2/(\omega_0 x_m{}^2)$,

$c = 1/2 \cdot F(\varphi_0, p)$,

$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{1-(\sqrt{3}+1)x_0{}^2/x_m{}^2}{1+(\sqrt{3}-1)x_0{}^2/x_m{}^2}\right)$.

Функция $F(\varphi_0, p)$ является неполным эллиптическим интегралом первого рода с модулем $p = 1/2 \cdot (1 - \sqrt{3}/2)$ и параметром $\varphi_0$. Период колебаний по-прежнему определяется формулой (11). Знаки (+) и (-) в аргументах эллиптических функций в (12) обусловлены направлением начальной скорости $v_0$ по отношению к начальному смещению $x_0$. Параметр $c$ играет роль фазового сдвига решения, который зависит от $x_0$ и $v_0$. Легко видеть, что $c = \pi/2$ при $x_0 = 0$ и $v_0 \neq 0$ и соответственно $c = 0$ при $x_0 \neq 0$ и $v_0 = 0$ и решение (12) сводится к решениям (7) и (10). При произвольных значениях $x_0$ и $v_0$ для заданного момента времени $t$ имеются два решения для $x(t)$, которые отличаются знаками перед фазой $c$ в аргументах эллиптических функций, что обусловлено изменением направления начальной скорости $v_0$.

Таким образом , мы показали, что физически линейный пружинный маятник может совершать нелинейные колебания благодаря геометрической нелинейности. При этом период и амплитуда колебаний существенно зависят от начального смещения и начальной скорости грузика. Полученные результаты свидетельствуют от том, что предельный переход к линейным колебаниям отсутствует. При любых начальных условиях колебания остаются нелинейными. Нелинейность полностью определяет движение грузика даже при сколь угодно малых смещениях из положения равновесия.

**Литература.**

1. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик . Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИФМЛ, М., 1963.

2. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Изд. «Наука», М.,1968.