OLIMPIADE ŞI OLIMPICI

Conf. univ. Dr. Mihai Marinciuc
Universitatea Tehnică a Moldovei

Pregătirea elevilor pentru participarea la concursuri pe disciplinele şcolare este o problemă importantă căreia i se acordă atenţie insuficientă. Autorul a activat timp îndelungat în domeniul dat şi consideră necesar să aducă unele informaţii şi să formuleze unele sugestii care ar trebui să fie cunoscute de elevi şi profesori.

Primele Olimpiade Internaţionale la disciplinele şcolare au fost cele de matematică. Acestea au fost organizate de România: prima, în 1959, la Braşov, şi a doua, în 1960, la Sinaia. Prima Olimpiadă Internaţională de Fizică a avut loc în 1967 la Varşovia, Polonia, iar prima Olimpiadă de Chimie a fost organizată în 1968 la Praga, Cehoslovacia. La primele ediţii ale olimpiadelor internaţionale participau doar echipele de elevi din fostul lagăr socialist, ţările din Europa de Est şi Uniunea Sovietică, circa 10 echipe. Olimpiadele erau organizate, pe rând, în ţări diferite.

Cu timpul această mişcare olimpică s-a extins, numărul de ţări participante s-a mărit considerabil. De exemplu, în 2008 la Olimpiada Internaţională de Matematică au participat 97 ţări, iar la cea de Fizică – 82. S-a lărgit şi cercul de discipline de studiu la care se organizează olimpiade de acest nivel. În 1989, la Sofia, Bulgaria, a avut loc prima Olimpiadă de Informatică. Au urmat olimpiade de biologie, geografie, iar în ultimii ani au fost organizate încă două olimpiade noi – de astronomie şi de astrofizică.

Fiecare olimpiadă are specificul său şi în cele ce urmează ne vom referi la cele de fizică. Comitetul de organizae a elaborat o listă a temelor de referinţă din cursul preuniversitar de fizică, în conformitate cu care se propun subiectele pentru cele două etape ale olimpiadei: experimentală şi teoretică. Subiectele sunt elaborate de ţara-gazdă, unele din ele reflectând specificul acestora. De exemplu, într-o problemă propusă la Olimpiada din Vietnam (2008) era cercetată funcţionarea unei instalaţii de descojire a orezului. Ţara-gazdă pregăteşte câteva variante de subiecte care în noaptea din ajunul etapei respective sunt analizate de către conducătorii echipelor şi alese cele care vor fi propuse elevilor, apoi sunt traduse. Punctajul maxim pentru două etape este de 50. Din echipă fac parte 5 elevi şi 2 profesori.

În funcţie de punctajul acumulat, elevilor li se înmînează Medalii de Aur, Argint, Bronz şi Menţiuni de Onoare. Ţinând seama că participanţii la olimpiade sunt cei mai buni tineri fizicieni ai ţărilor respective, regulamentul prevede premierea a circa 60% din numărul lor, inclusiv circa 6% cu Medalii de Aur, 18% cu Medalii de Aur şi Argint împreună, 36% cu Medalii de Aur, Argint şi Bronz împreună, iar restul de până la 60% - cu Menţiuni de Onoare. De exemplu, la Olimpiada din 2008 la care au participat 376 elevi au fost înmânate 46 Medalii de Aur, 47 de Argint, 78 de Bronz şi 87 Menţiuni de Onoare.

Pentru prima dată un reprezentant al Republicii Moldova a fost prezent la o Olimpiadă Internaţională de Fizică în 1994, în China. Doamna Iulia Malcoci, pe atunci specialist principal la Ministerul Invăţământului, a participat la ea ca observator, după cum cere şi regulamentul. Anul următor, 1995, a fost anul de debut al elevilor noştri. Pe parcursul anilor, participanţii din R. Moldova s-au învrednicit de mai multe premii. Le vom enumera în ordinea cronologică şi a creşterii valorii acestora.

Prima Menţiune de Onoare a obţinut-o elevul Victor Vihrov de la Liceul „Gaudeamus” din Chişinău la Olimpiada din Australia (Canberra, 1995). Asemenea menţiuni au mai obţinut A Andreev şi A. Marcoci (1996), A Miron (1997), V. Bordeianu şi A. Siloci (1998), F. Gaburov (2000), G. Chistol (2001), V. Şevcenco (2003), A.Galamaga (2003 şi 2004), E.

Plămădeală (2004 şi 2006), Veaceslav Abetchin (2005), I. Burovenco (2006), Vitalii Abetchin (2007), V. Buza şi M. Lopuşanschi (2008) – în total 18 Menţiuni de Onoare.

Prima Medalie de Bronz a fost adusă în 1997 de Victor Bordeianu (Liceul Republican Real, fostul meu elev) de la Olimpiada din Canada (Sudbury). Medalii de aceeaşi valoare au mai obţinut: V. Timciuc (1999), D. Cojuhari şi E. Sorbală (2004), V. Vanovschi (2005 şi 2007), E. Plămădeală şi A. Voloşciuc (2005), Ş. Sanduleanu (2007 şi 2008), A. Patrinica (2008) – în total 11 Medalii de Bronz.

Prima Medalie de Argint a fost obţinută de către Gheorghe Chistol de la Liceul Moldo-Turc din Chişinău în 2002 la Olimpiada din Turcia (Antalya). Astfel de medalii au mai obţinut R. Parpalac în 2004 şi V. Vanovschi în 2006 – în total 3 Medalii de Argint.

În sfârşit, anul 2008 a adus prima Medalie de Aur. Ea a fost obţinută de către elevul Dmitrii Lemeşevschi de la Liceul „Gaudeamus” la Olimpiada din Vietnam (Hanoi). Dmitrii s-a situat pe poziţia a 8-a din cei 376 participanţi! El este unicul reprezentant al unei ţări europene printre primii 15 lideri ai clasamentului, pe locul 16 aflându-se un elev din Rusia. Elevul din Moldova se află pe primul loc printre elevii din Europa! Acesta este un succes extraordinar!

În 2008 lotul Republicii Moldova a obţinut cel mai bun rezultat al său: toţi membrii echipei au fost premiaţi – 1 Medalie de Aur, 2 de Bronz şi 2 Menţiuni de Onoare. Încă o dată, în 2004, toţi membrii lotului s-au întors cu premii: 1 Medalie de Argint, 2 de Bronz şi 2 Menţiuni de Onoare. Elevul care a obţinut cele mai multe premii este Vladimir Vanovschi de la Liceul „Nicolae Milescu-Spătaru” din Chişinău – 1 Medalie de Argint şi 2 Medlii de Bronz.

Primele locuri între echipe la Olimpiadele Internaţionale de Fizică sunt ocupate de cele din Asia. În 2008, pe locurile 1 şi 2 s-au situat China şi Taiwan cu câte 5 Medalii de Aur, urmate de Koreea de Sud, Vietnam şi India cu câte 4 Medalii de Aur şi 1 Medalie de Argint, apoi Tailanda şi SUA cu câte 3 Medalii de Aur şi 2 Medalii de Argint. La Matematică pe primul loc s-a situat China, urmată de Rusia şi SUA, apoi încă 4 ţări asiatice. Se observă clar că progresul economic considerabil înregistrat în ultimii ani de ţările din regiunea respectivă corespunde performanţelor tinerilor fizicieni şi matematicieni.

Aceste rezultate generează o întrebare evidentă: cât de performant este sistemul european de învăţământ şi dacă nu cumva el trebuie modificat ţinând seama de cel asiatic?

Timp de 27 ani am participat la pregătirea şi organizarea Olimpiadelor Republicane de Fizică, am condus loturile de elevi la Olimpiadele Unionale, apoi şi primul lot al Moldovei la o Olimpiadă Internaţională – la cea din Australia (1995), am editat lucrări cu probleme pentru olimpiade. Aceasta îmi permite să formulez câteva sugestii referitor la problema pusă în discuţie. Nu trebuie să inventăm strategii noi, ci să le adaptăm pe cele din lumea sportului.

În primul rând, pregătirea elevilor trebuie începută în clasele primare prin organizarea diferitelor concursuri care să le dezvolte interesul pentru o disciplină de studiu sau alta. Printre acestea ar fi binevenite concursurile de „Ştiinţe”. În clasele gimnaziale şi liceale organizarea concursurilor la toate disciplinele şcolare devine sistematică. În prezent, se mai întâlnesc situaţii când profesorii trimit elevii care învaţă mai bine direct la olimpiadele raionale, fără a organiza etapa din şcoală. În afară de aceasta, elevii buni sunt trimişi, deseori împotriva voinţei lor, să participe la concursuri pe mai multe discipline (ei nu pot refuza pentru a nu „strica” relaţiile cu profesorii). Elevii învingători la concursuri trebuie stimulaţi, cel puţin moral, – să le fie înmânate diplome, despre ei să se scrie în ziarele raionale ş.a. Aici trebuie iarăşi să luăm ca exemplu lumea sportului (o echipă oarecare poate pierde meci după meci, dar presa continuă să scrie despre ea).

Elevii olimpici trebuie să beneficieze, asemenea sportivilor, de cantonamente – tabere de matematică, fizică, chimie, biologie, informatică etc. în vederea pregătirii speciale pentru concursuri-competiţii, precum şi pentru odihnă, pentru a-şi fortifica sănătatea. După cum sportivii participă la mai multe competiţii sau meciuri amicale, tot aşa şi elevii trebuie să participe la diverse concursuri. Cu părere de rău, acestea se organizează în număr mic. În afară de Olimpiada Republicană cu etapele ei, doar Universitatea Tehnică organizează, de mai bine de zece ani, olimpiade de fizică, matematică, chimie, informatică, însă doar pentru elevii claselor terminale (materialele primelor olimpiade au fost publicate şi difuzate prin licee). În ultimii ani, Universitatea de Stat „Aleco Russo" din Bălţi a organizat două olimpiade memoriale: de fizică „Petru Medveţchi" şi de matematică „Valentin Belousov", la ele participând un număr impunător de elevi din raioanele de nord. Aceste exemple ar trebui urmate şi de alte universităţi. Lipsesc concursuri inter-raionale, precum şi concursuri organizate de organele de presă, în primul rând, de cele destinate cadrelor didactice.

Elevii dotaţi duc o mare lipsă de culegeri cu probleme şi alte materiale de la diferite concursuri. La începutul anilor 80 ai secolului trecut au fost publicate subiectele primelor olimpiade de fizică, matematică şi chimie. În 1994 am editat lucrarea „Olimpiade de fizică" care conţine subiectele propuse elevilor în anii 1965-1993. De atunci s-au acumulat suficiente materiale care merită să fie puse la dispoziţia unui cerc larg de elevi şi profesori.

Olimpiadele Internaţionale, asemenea competiţiilor sportive, fac cunoscută Moldova în lume. La festivităţile de inaugurare şi de premiere, în faţa participanţilor defilează şi un elev din Moldova purtând tricolorul. Un eveniment deosebit a avut loc la Olimpiada de Matematică din Mexico, la care elevul nostru Iurii Boreico a propus o soluţie originală a unei probleme, soluţie pe care nu a văzut-o nici unul din membrii juriului. Soluţia a fost apreciată cu un premiu special, la primirea căruia Boreico a ieşit în scenă înfăşurat în tricolorul nostru naţional.

Oraşul Chişinău a găzduit Balcaniade de Matematică cu participarea elevilor din zonă. În cadrul Olimpiadei din Islanda (Reykjavik, 1998) s-a alcătuit o listă a ţărilor care ar dori să-şi asume organizarea unei olimpiade de acest nivel. La propunerea regretatei Liliana Filip, profesoară de fizică, pe atunci director al Liceului „Dante Alighieri" din Chişinău, în lista de ţări candidate a fost inclusă şi Moldova. Ministerul Educaţiei de la Chişinău a confirmat disponibilitatea ţării de a se angaja ca organizator şi astfel R. Moldova este planificată să organizeze Olimpiada Internaţională de Fizică din anul 2017. Aceasta ne obligă să intensificăm lucrul cu elevii dotaţi.

Primit la redacţie: 12 aprilie 2009

OLIMPIADA REPUBLICANA DE FIZICA - 2009

Probleme propuse

Clasa a IX-a

Problema l.

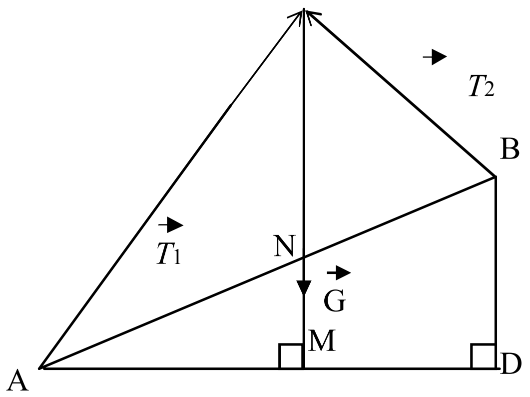
O bară omogenă cu masa de 2 kg şi lungimea de 0,5 m este suspendată cu ajutorul a două fire cu lungimile OA = 0,4 m şi OB = 0,3 m (v. figura). Determinaţi unghiul format de bară cu orizontala şi forţele de tensiune din firele de suspensie.

Rezolvare

Se dă:
[OA]=0,4 m
[OB]=0,3 m
[AB]=0,5 m
M_{bara}=20 kg

<BAD=?
$T_{1,2}$ =?

O



Laturile AO, OB şi AD sunt laturi ale unui triunghi dreptunghic

$$0.3^2 + 0.4^2 = 0.5^2$$

Unghiul AOB= 90°. Trasăm AD paralel cu solul. BD, NM fiind perpendiculare pe AD, cos(<OBD)=0.3/0.5=0.6. Deci, <OBD= 53° şi <OAB= 37°

Aşa cum ON este mediana în triunghiul AOB, avem

$$ON = AN = NB$$

Deci N este centrul cercului circumscris lui AOB şi AOBD ($\langle AOB + \langle BDA = 180^\circ$).
Avem $\langle AON = \langle OAN = 37^\circ$, deci $\langle ANM = 16^\circ$

$$T_1 \cdot \cos 53^\circ - T_2 \cdot \sin 53^\circ = 0$$

$$T_1 \cdot \sin 53^\circ + T_2 \cdot \cos 53^\circ = G$$

Deci, rezultă $T_1 = 16N$ şi $T_2 = 12N$.

Problema 2.

Un cub de gheaţă (ρ = 900 kg/m^3) cu muchia de 40 cm pluteşte în apă (ρ_1 = 1000 kg/m^3). De asupra lui se toarnă petrol (ρ_2 = 800 kg/ m^3) acoperind complet cubul de gheaţă. Să se determine:

1). În ce sens şi cu cât se va deplasa cubul.

2). Ce lucru trebuie să se efectueze pentru a scufunda cubul complet în apă:

a) când cubul pluteşte numai în apă;

b) când de asupra cubului se află petrol.

Rezolvare

Se dă:

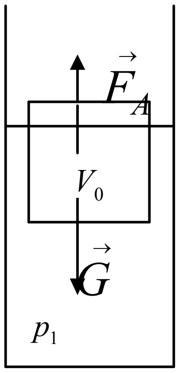
l = 0,4 m

$p = 900 \dfrac{kg}{m^3}$

$p_1 = 1000 \dfrac{kg}{m^3}$

$p_2 = 800 \dfrac{kg}{m^3}$

x, L_a, L_b=?



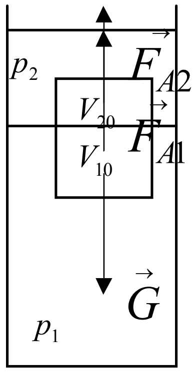
$F_A = mg$; $p_1 \cdot l^2 (l-h) = l^2 p$

$p_1 (l-h) = l \cdot p$; $p_1 \cdot l - p_1 \cdot h = l \cdot p$

$(p_1 - p) l = p_1 h$; $h = \dfrac{(p_1 - p) l}{p_1} = 0.1 l$

$h = 0.04 m$

$x = H - h = 16 cm$



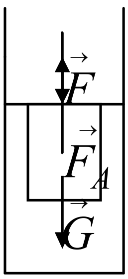
$F_{A1} + F_{A2} = mg$

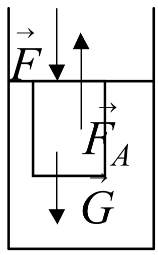
$p_1 l^2 (l - H) + p_2 l^2 H = p l^3$

$p_1 (l - H) + p_2 H = p l$

$(p_1 - p) l = (p_1 - p_2) H$

$l = \dfrac{100 l}{200 l} = 0.2 m \quad H = \dfrac{p_1 - p}{p_1 - p_2} = 20 cm$





$L = F_m h = \dfrac{O + F}{2} h$

2)a; $F = F_A - mg = p_1 g V - p g V = (p_1 - p) g V$; b) $F = F_A - mg = (p_1 - p) g V$

$L_a = \dfrac{(p_1 - p) g V h}{2} = 1.28 J$ $\qquad$ $L_b = \dfrac{(p_1 - p) g V H}{2} = 6.4 J$

Problema 3.

Într-un vas cu apă la temperatura de 10°C s-a introdus un corp cu temperatura de 100°C. După stabilirea echilibrului termic temperatura a devenit egală cu 40°C.

Ce temperatură a apei se va stabili dacă în ea se vor mai introduce încă două corpuri identice cu primul, încălzite până la aceeaşi temperatură (100°C)?

Capacitatea calorică a vasului nu se va neglija.

Rezolvare

Se dă:

$t_1 = 10^\circ C$

$t_2 = 100^\circ C$

$\Delta t_1 = 40^\circ C$

C-capacitatea calorică a vasului împreună cu apă

$\Delta t_2 = ?$

$$mc(t_2 - \Delta t_1) = C(\Delta t_1 - t_1); \ (1)$$

După ce se introduc încă două corpuri vom avea:

$$2mc(t_2 - \Delta t_2) = C(\Delta t_2 - \Delta t_1) + mc(\Delta t_2 - \Delta t_1)$$
$$2mc(t_2 - \Delta t_2) - mc(\Delta t_2 - \Delta t_1) = C(\Delta t_2 - \Delta t_1) \ (2)$$

Împărţim (1) la (2):

$$\frac{t_2 - \Delta t_1}{2(t_2 - \Delta t_2) - (\Delta t_2 - \Delta t_1)} = \frac{\Delta t_1 - t_1}{\Delta t_2 - \Delta t_1}$$

Am obţinut o ecuaţie cu o singură necunoscută:

$$\frac{60}{2(100 - \Delta t_2) - \Delta t_1 + 40} = \frac{30}{\Delta t_2 - 40}$$
$$240 - 3\Delta t_2 = 2\Delta t_2 - 80$$
$$320 = 5\Delta t_2$$
$$\Delta t_2 = 64^\circ C$$

Clasa a X-a

Problema l.

O bilă este legată de tavan în punctul O cu ajutorul unui fir inextensibil şi imponderabil de lungime *l*. În poziţie iniţială firul este orizontal. Din această poziţie firul este eliberat fără viteză iniţială.

Să se determine:

l. La ce distanţă minimă de la punctul pe axa verticală Oy trebuie bătut un cui în perete pentru ca bila să se mişte pe o traiectorie circulară?

2. Să se determine distanţa minimă dintre bilă şi tavan, dacă cuiul este bătut la distanţa $y = l/2$ pe axa Oy.

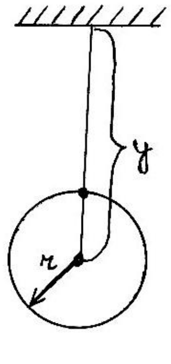
3. De-a lungul axei Oy din punctul O se fixează perpendicular pe planul figurii o placă de oţel cu lungimea $l/2$. Sa se determine la ce distanţă de la punctul O bila se va ciocni cu placa.

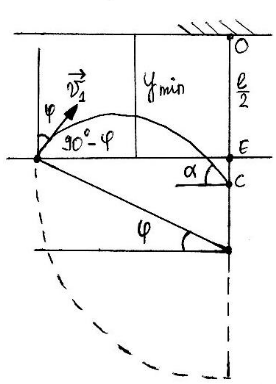
4. Unghiul de incidenţă a bilei pe placă (unghiul dintre viteza bilei şi normala la placă.

5. Viteza bilei la ciocnire.

6. Ce viteză minimă orientată vertical trebuie să aibă bila în poziţie iniţială pentru ca ciocnirea cu placa să aibă loc în punctul O?

Rezolvare





1.

$r = l - y$

$ma_c = T + mg$

$mg(y - r) = \frac{mv^2}{2} \qquad T = 0$

$\frac{mv^2}{r} = my \qquad \boxed{y = 0{,}6l}$

2.

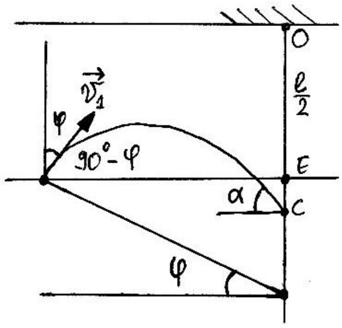
$$R = \frac{l}{2}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgR(1 - \sin\varphi)$$

$$T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_0^2}{R} = mg \cdot \sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{2}{3} \qquad h_2 = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$h_2 = \frac{5}{54}l \qquad \boxed{y_{\min} = \frac{2}{27}l}$$



3.

$$y = v_1 \cos\varphi \cdot t - \frac{gt^2}{2}; \; x = v_1 \sin\varphi \cdot t$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x - \frac{27}{8l}x^2$$

La ciocnire

$$x = HE$$

$$y = EC$$

Obţinem $\boxed{y_c = EC = -\frac{5}{96}l}$ $\qquad OC = \frac{7}{32}l$

4.

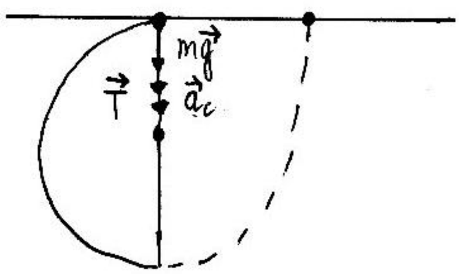
$$tg\alpha = \frac{v_y}{v_x}; \qquad v_y = v_x \cos\varphi - gt_c; \quad y_c = v_1 \cos\varphi \cdot t_c - \frac{gt_c^2}{2}; \quad \boxed{tg\alpha = -\frac{5\sqrt{5}}{8}} \; \alpha = 54{,}4^\circ$$

5.

Viteza în punctul C: $\frac{mv_c^2}{2} = mg\frac{7}{32}l$ $\quad \boxed{v_c = \frac{\sqrt{7}}{4}\sqrt{lg}}$

6.

$$ma_c = mg + T = 0$$



$$m\frac{v^2}{R} = mg \qquad v = \sqrt{Rg}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg \qquad v = \sqrt{Rg}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgl = \frac{mv^2}{2} + mgl$$

$$v = v_0 \quad \boxed{v_0 = \sqrt{Rg}}$$

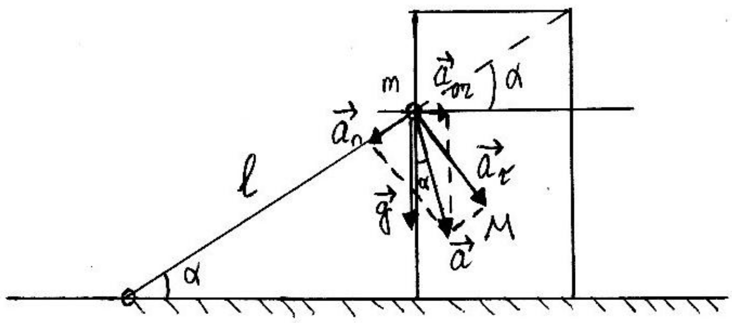
Problema 2.

Pe o bară imponderabilă de lungime *l* cu joncţiune articulată în punctul de sprijin este fixat un corp de masă *m*. Iniţial bara este în poziţie verticală, sprijinită de un corp cu masa *M*. În urma unui mic impuls sistemul începe să se mişte. Raportul maselor corpurilor este *M*/*m* = 4.

Care va fi unghiul dintre bară şi linia orizontală în momentul desprinderii corpurilor unul de altul dacă se neglijează forţele de frecare?

Determinaţi viteza *U* a corpului cu masa *M* în acest moment.

Rezolvare



În momentul desprinderii corpurilor cu masele m şi M unul de altul viteza v_M şi acceleraţia a_M a corpului cu masa M sunt egale corespunzător cu componentele orizontale ale vitezei şi acceleraţiei corpului cu masa m: $v_M = v_{or.m}$, $a_M = a_{or.m}$ (1)

Pentru corpul cu masa m:

$$\vec{a}_m = (\vec{a}_n + \vec{a}_\tau)_m \tag{2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{l} \tag{3}$$

Proiectând (2) pe axa orizontală, obţinem :

$$a_{or.m} = a_\tau \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - a_n \cos\alpha = a_\tau \sin\alpha - \frac{v^2}{l}\cos\alpha \tag{4}$$

Ţinând cont de (1), pentru corpul cu masa M, obţinem:

$$N = Ma_{or} = Ma_\tau \sin\alpha - M\frac{v^2}{l}\cos\alpha \tag{5}$$

În momentul desprinderii, $N = 0$, iar $a_\tau = g\cos\alpha$ (6).

Ţinând seama de (6), din (5) avem : $g\cos\alpha\sin\alpha = \frac{v^2}{l}\cos\alpha$ sau $v = \sqrt{gl\sin\alpha}$ (7)

Viteza $\vec{U}$ a corpului cu masa M este orientată orizontal :

$$U = v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = v\sin\alpha \tag{8}$$

Din legea conservării energiei :

$$mgl = mgl\sin\alpha + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2\sin^2\alpha}{2} \quad (9)$$

Substituind (7) în (9), obţinem : $\frac{M}{m} = \frac{2-3\sin\alpha}{\sin^3\alpha}$ (10)

Din datele problemei $U\sin^3\alpha = 2-3\sin\alpha$ (11)

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\alpha = 30^\circ$

Deci, $v = \sqrt{\frac{gl}{2}}$ $U = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gl}{2}}$.

Problema 3.

Un baschetbalist pe stadion aruncă mingea cu viteza iniţială de 10 m/s orientată sub un unghi de $\alpha = 45^\circ$ faţă de planul orizontal. Coşul se află la înălţimea de 3,05 m. Mingea se desprinde de mîinile baschetbalistului la înălţmea de 2,1 m.

Sa se determine:

a) De la ce distanţă el trebuie să arunce mingea pentru ca să nimerească în coş?

b) De la ce distanţă maximă el va nimeri în coşul care se află la înălţimea de 2,1 m în sala sportivă, în care tavanul se află la înălţimea de 3,38 m. Unghiul α este necunoscut.

Rezolvare

Se dă

$v_0 = 10\,m/s$

$\alpha = 45^\circ$

$H = 3{,}05m$

$h = 2{,}10m$

a) $y = h + v_0\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$

$x = v_0\cos\alpha \cdot t$; unde $y = H$

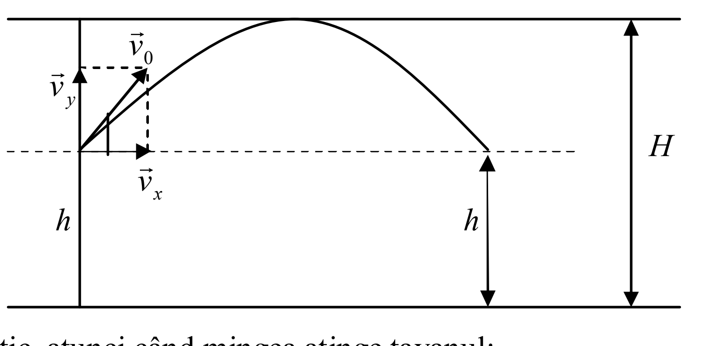
Rezultă

$$y = h - \frac{g}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}x^2 + tgx$$

$$x = \frac{v\ \cos^2\alpha}{g}\left(tg\alpha \pm \sqrt{tg\alpha - \frac{2g(H-h)}{v_0^{\,2}\cos^2\alpha}}\right)$$

De la $1m$ mingea intră de jos în sus $x_1 = 1m$ $\boxed{x_2 = 9m}$

b)



Unghiul critic, atunci când mingea atinge tavanul:

$$H - h = \frac{v_0^{\,2}\sin^2\alpha}{2g} \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2g(H-h)}}{v_0} = 0{,}5$$

Distanţa $x = \frac{2v_0^{\,2}\cos\alpha\sin\alpha}{g}$ sau $x = \frac{2v_0^{\,2}\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{g} = 8{,}84m$

Clasa a XI-a

Problema 1.

O scândură cu lungimea de 6 m şi masa *m* se mişcă fără de frecare pe o suprafaţă orizontală cu viteza de 6 m/s. La mijlocul scândurii se pune cu grijă un corp paralelipipedic cu masa *m*/2. Coeficientul de frecare dintre corp şi scândură este egal cu 0,3. Acceleraţia de cădere liberă g = l0 m/s^2.

a) Demonstraţi că corpul va părăsi scândura.

b) Determinaţi viteza scândurii la acest moment.

c) Cât timp se va afla corpul pe scândură?

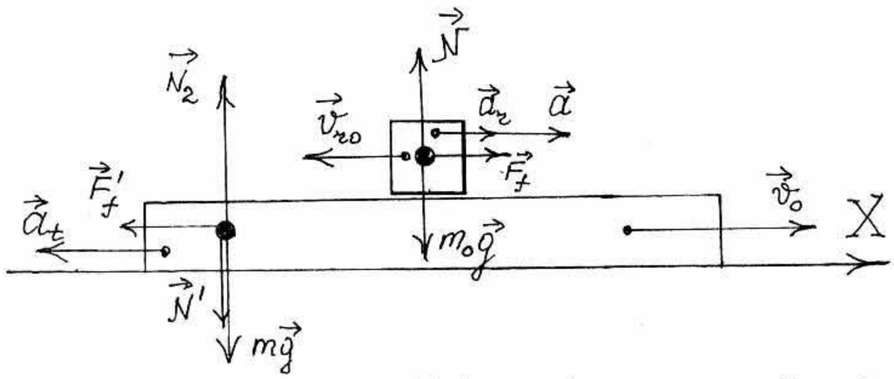
d) Ce distanţă a parcurs scândura în primele 4 s de la monentul când corpul a fost pus pe ea?

c) Cu ce viteză faţă de scândură corpul o va părăsi?

În toate cazurile, dimensiunile corpului se neglijează în raport cu lungimea scândurii.

Rezolvare

Se dă:
L = 6 m;
m; $m_0 = m/2$;
v_0 = 6 m/s;
μ = 0,3;
g = 10 m/s^2.
a) s_r – ?
b) τ – ?
c) v_t – ?
d) s_4 – ?
e) v_r – ?



a) Cînd punem corpul pe scîndură observatorului de pe ea i se pare că corpul se mişcă în sens opus mişcării scîndurii cu viteza $v_{r0} = v_0$.

În sistemul de referinţă fix (legat cu Pămîntul) corpul se mişcă spre drepta cu acceleraţia absolută $\vec{a}$:

$$m_0\vec{a} = m_0\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f. \qquad (1)$$

Forţa de frecare $\vec{F}_f$ care acţionează asupra corpului de pe scîndură este orientată în sensul axei OX (adică spre dreapta) şi are modulul $F_f = \mu m_0 g$. Proiectînd ecuaţia (1) pe axa OX, obţinem:

$$m_0 a = F_f = \mu\, m_0 g,$$

de unde se vede că

$$a = \mu g. \qquad (2)$$

Omul de pe scîndură vede că corpul „fuge" de la el dar viteza corpului scade. Deci, acceleraţia relativă $\vec{a}_r$ este orientată în sens opus vitezei relative $\vec{v}_r$, adică spre dreapta. În conformitate cu legea compunerii acceleraţiilor pentru mişcarea dată avem:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t. \qquad (3)$$

Proiectînd (2) pe axa OX, aflăm

$$a = a_r - a_t,$$

de unde pentru modulul acceleraţiei relative obţinem:

$$a_r = a + a_t. \qquad (4)$$

Unica forţă care frînează scîndura este forţa $\vec{F}'_f = -\vec{F}_f$ (în conformitate cu legea a treia a lui Newton). Astfel ecuaţia fundamentală a dinamicii pentru scîndură ia forma:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}' + N_2 + \vec{F}_f'. \quad (5)$$

Proiectînd-o pe axa OX, obţinem:

$$-ma_r = -F_f', \quad ma_t = F_f', \quad F_f' = F_f = \mu m_0 g, \quad ma_t = \mu m_0 g.$$

Astfel,

$$a_t = \frac{\mu m_0 g}{m} = \frac{\mu g}{2}; \quad a_t = \frac{0{,}3 \cdot 10}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (6)$$

Ţinînd cont de relaţiile (2) şi (6), expresia (4) pentru acceleraţia relativă ia forma:

$$a_r = \mu g + \frac{\mu g}{2} = \frac{3}{2}\mu g; \quad a_r = \frac{3 \cdot 0{,}3 \cdot 10}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (7)$$

Omul de pe scîndură vede la început că corpul de pe scîndură fuge de la el cu viteza $v_{r0} = v_0$. Din cauza frecării ($\vec{a}_r$ orientată contra $\vec{v}_{r0}$) viteza corpului faţă de scîndură scade. Dacă scîndura ar fi suficient de lungă, corpul s-ar opri pe ea. Să calculăm ce distanţă ar parcurge el pînă la oprire. Folosim formula lui Galilei: $v_{r0}^2 - 0 = 2a_r s_r$. Fiindcă $v_{r0} = v_0$, obţinem (ţinînd cont de (7)):

$$s_r = \frac{v_0^2}{2a_r} = \frac{v_0^2}{2 \cdot 1{,}5\mu g} = \frac{v_0^2}{3\mu g}; \quad s_r = \frac{6^2}{3 \cdot 0{,}3 \cdot 10} \text{m} = 4 \text{ m}. \quad (8)$$

Fiind pus la mijlocul scîndurii ($\frac{L}{2} = \frac{6 \text{ m}}{2} = 3 \text{ m}$) corpul nu se va opri pe scîndură (va cădea jos)

b) Pe scîndură corpul parcurge uniform încetenit distanţa $L/2$ cu viteza iniţială $v_{r0} = v_0$ şi acceleraţia a_r. Deci,

$$\frac{L}{2} = v_0 t - \frac{1}{2} a_r t^2.$$

Rezolvînd această ecuaţie faţă de t, obţinem: $t_1 = 2$ s şi $t_2 = 2/3$ s. Rădăcina $t_1 = 2$ s corespunde situaţiei cînd după oprire corpul se întoarce înapoi cu acceleraţia a_r la distanţa $L/2$. Ceea ce pentru enunţul dat este lipsit de sens. Rîmîne adevărată doar rădăcina $\tau = t_2 = 2/3$ s.

c) La momentul cînd corpul părăseşte scîndura aceasta şi-a micşorat viteza datorită acceleraţiei $a_t = 1{,}5$ m/s^2 orientate în sens opus axei OX. Deci viteza scîndurii la acest moment este:

$$v_t = v_0 - a_t\tau; \quad v_t = (6 - 1{,}5 \cdot 2/3) \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}. \quad (9)$$

d) După ce corpul cade, scîndura se mişcă uniform cu viteza de 5 m/s timp de $(4 - 2/3)$ s = 10/3 s şi la sfîrşitul secundei a patra ea are parcursă distanţa

$$s_4 = v_0\tau - \frac{1}{2}a_t\tau^2 + v_t(4 - \tau); \quad s_4 = \frac{6 \cdot 2}{3} - \frac{1}{2}\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5\left(4 - \frac{2}{3}\right) = \frac{61}{3} \text{ m} \approx 20{,}33 \text{ m}. \quad (10)$$

e) Faţă de scîndură corpul avea viteza iniţială $v_{r0} = v_0$ şi s-a mişcat uniform încetenit cu acceleraţia a_r timpul $\tau = 2/3$ s. Deci, la momentul părăsirii scîndurii viteza lui faţă de scîndură era egală cu:

$$v_r = v_0 - a_r\tau; \quad v_r = \left(6 - \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Răspuns: a) corpul va părăsi scîndura (4 m > 3 m); b) corpul se va afla pe scîndură $\tau = 2/3$ s; c) la momentul cînd corpul părăseşte scîndura aceasta are viteza de 5 m/s; d) timp de 4 s de la începutul mişcării scîndura parcurge distanţa de circa 20,33 m; e) la momentul părăsirii scîndurii viteza corpului este de 3 m/s.

Problema 2.

O cisternă orizontală cu lungimea L = 6 m, masa m_3 = 100 kg şi diametrul de 2 m este despărţită în două compartimente (de lungime $L/3$ şi $2L/3$) de un perete vertical. În primul compartiment se află oxigen la temperatura t_0 = 10°C şi presiunea de $9p_o$, iar în al doilea - azot la aceeaşi temperatură şi presiunea de $6p_o$. Peretele se înlătură.

Considerând gazele ideale şi $p_0 = 10^5$ Pa, determinaţi:

a) presiunea în cisternă, în presupunerea că transfomarea este izotermă;

b) masa molară a amestecului de gaze;

c) deplasarea cisternei, neglijând toate forţele de rezistenţă;

d) presiunea p în cisternă, dacă temperatun amestecului de gaze din ea creşte liniar de la 10°C, la un capăt al ei, până la 20°C la celălalt capăt.

Remarcă. În calcule se poate folosi formula $1/(1\pm\varepsilon) \approx (1\pm\varepsilon)$ sau $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon - \varepsilon^2/2 + \varepsilon^3/3$, valabile pentru $\varepsilon << 1$. Să se considere $\Delta T/T_0 << 1$.

R e z o l v a r e

Se dă:
$L = 6$ m;
$m_3 = 100$ kg;
$d = 2$ m;
$L_1 = L/3$;
$L_2 = 2L/3$;
$t_0 = 10$ °C, $T_0 = 283$ K;
$p_1 = 9p_0$;
$p_2 = 6p_0$;
$p_0 = 10^5$ Pa;
$t_1 = 20$ °C, $T_1 = 293$ K.
a) p' – ?
b) M – ?
c) Δx – ?
d) p – ?

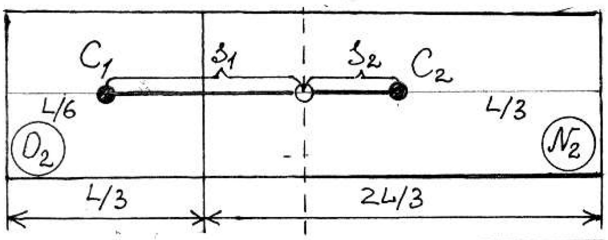


Fig. 1 a

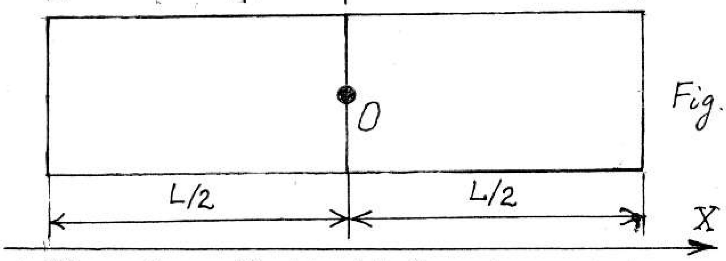


Fig. 1 b

a) Aplicăm legea lui Dalton şi aflăm presiunea p' în cisternă după amestecarea gazelor:

$p' = p_1' + p_2'$, (1)

unde p_1' este presiunea parţială a oxigenului, iar p_2' este presiunea parţială a azotului.

Ţinînd cont că volumul ocupat iniţial de oxigen este $V_1 = V/3$, iar volumul ocupat iniţial de azot este $V_2 = 2V/3$, aflăm p_1' şi p_2' utilizînd legea transformării izoterme:

$$p_1V_1 = p_1'V, \text{ de unde } p_1' = \frac{V_1}{V}p_1 = \frac{1}{3}p_1 = 3p_0; \qquad (2)$$

$$p_2V_2 = p_2'V, \text{ de unde } p_2' = \frac{V_2}{V}p_2 = \frac{2}{3}p_2 = 4p_0; \qquad (3)$$

Substituind relaţiile (2) şi (3) în (1), obţinem:

$$p' = 3p_0 + 3p_0 = 7p_0; \qquad p' = 7p_0 = 7\cdot 10^5 \text{ Pa}. \qquad (4)$$

b) Amestecul de oxigen (M_1) şi azot (M_2) se comportă ca un gaz ideal cu masa $m = m_1 + m_2$ şi masa molară M. Scriem ecuaţia de stare termică a gazelor pînă la amestecare şi aflăm m_1 şi m_2:

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{M_1}RT_0, \quad m_1 = \frac{p_1V_1M_1}{RT_0}; \qquad (5)$$

$$p_2V_2 = \frac{m_2}{M_2}RT_0, \quad m_2 = \frac{p_2V_2M_2}{RT_0}; \qquad (6)$$

Ţinînd cont de relaţiile (4), (5) şi (6), din ecuaţia Clapeyron – Mendeleev scrisă pentru amestecul de gaze, obţinem:

$$p'V = \frac{m}{M}RT_0, \quad M = \frac{(m_1+m_2)RT_0}{p'V} = \frac{3M_1 + 4M_2}{7}; \quad M = \frac{3\cdot 32\cdot 10^{-3} + 4\cdot 28\cdot 10^{-3}}{7}\frac{\text{kg}}{\text{mol}} \approx 29{,}71\cdot 10^{-3}\frac{\text{kg}}{\text{mol}}. \; (7)$$

c) Pînă la amestecarea gazelor centrul de masă al oxigenului se află în punctul C_1, iar centrul de masă al azotului – în punctul C_2. După amestecarea gazelor centru de masă al amestecului omogenizat se află în centrul cisternei. Deci, C_1 s-a mutat în O, deplasîndu-se cu $s_1 = \frac{L}{2} - \frac{L}{6} = \frac{L}{3}$ (fig. 1 *a*), iar C_2 s-a mutat în O, deplasîndu-se cu $s_2 = \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{L}{6}$ (fig. 1 *a*). Acestea sînt deplasările față de cisternă. Față de Pămînt deplasările lui C_1 și C_2 vor fi:

$\Delta x_1 = \Delta x + s_1$ și $\Delta x_2 = \Delta x - s_2$,

unde Δx este deplasarea cisternei.

Centrul maselor sistemului „gaze – cisternă" se determină cu formula (față de Pămînt):

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Deoarece $\sum F_{kx}^{\text{ext}} = 0$ (de-a lungul axei OX nu acționează forțe) centrul maselor sistemului întreg nu se mișcă, deci, $\Delta x_C = 0$. Prin urmare,

$$\Delta x_C = \frac{m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + m_3 \cdot \Delta x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0,$$

de unde rezultă că

$$m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + m_3 \cdot \Delta x_3 = 0 \quad \text{sau} \quad m_1(\Delta x + s_1) + m_2(\Delta x - s_2) + m_3 \cdot \Delta x = 0. \qquad (8)$$

Rezolvînd ecuația de mai sus în raport cu Δx, obținem:

$$\Delta x = \frac{m_2 s_2 - m_1 s_1}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{L}{6}\frac{m_2 - 2m_1}{m_1 + m_2 + m_3}$$

sau

$$\Delta x = \frac{L}{6}\frac{1 - 2\frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_3}{m_2}}. \qquad (9)$$

Din (5) și (6) rezultă:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1 V_1 M_1}{p_2 V_2 M_2} = \frac{9}{12}\frac{M_1}{M_2}; \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{9}{12}\frac{32 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \approx 0{,}857. \qquad (10)$$

Raportul

$$\frac{m_3}{m_2} = \frac{m_3 R T_0}{p_2 V_2 M_2} = \frac{m_3 R T_0}{p_0 \pi d^2 L M_2}; \quad \frac{m_3}{m_2} = \frac{100 \cdot 8{,}31 \cdot 283}{10^5 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 6 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} \approx 1{,}115. \qquad (11)$$

Substituind (10) și (11) în (9), obținem:

$$\Delta x = \frac{L}{6}\frac{1 - 2 \cdot 0{,}857}{1 + 0{,}857 + 1{,}115} \approx -0{,}04L; \quad \Delta x = -0{,}24\ \text{m}. \qquad (12)$$

c) Temperatura amestecului de gaze în cisternă crește liniar de la un capăt la altul. Într-un plan aflat la distanța x de la capătul cu temperatura T_0 temperatura gazului este

$T = T_0 + bx$.

Dacă $x = 0$, atunci $T = T_0$, iar dacă $x = L$, atunci $T = T_1 = T_0 + \Delta T$. Rezultă că $T_0 + bL = T_0 + \Delta T$, de unde $b = \Delta T/L$. Astfel obținem:

$T = T_0 + \Delta T \cdot x/L$.

Din ecuația de stare termică $p(x)V = \frac{m}{M}RT$ exprimăm densitatea gazului în planul dat:

$$\rho(x) = \frac{p(x)M}{RT} = \frac{p(x)M}{R(T_0 + \Delta T \cdot x/L)} = \frac{p(x)M}{RT_0\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\cdot\frac{x}{L}\right)}.$$

Întrucît $\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{10}{283} = 0{,}035 << 1$, obținem:

$$\rho(x) = \frac{p(x)M}{RT_0}\left(1 - \frac{\Delta T}{T_0}\cdot\frac{x}{L}\right). \qquad (13)$$

Din (13) se vede că densitatea depinde liniar de x. În acest caz $m = \rho_m V$, unde $\rho_m = (\rho(0) + \rho(L))/2$ și pentru m obținem:

$$m = \frac{pMV}{RT_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right). \qquad (14)$$

Pe de altă parte

$$m = \frac{p'VM}{RT_0}. \qquad (15)$$

Egalînd (14) şi (15), aflăm:

$$p = \frac{p'}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta T}{T_0}}. \qquad (16)$$

Folosind formula pentru calculul aproximativ, obţinem:

$$p = p'\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta T}{T_0}\right). \qquad (17)$$

Folosind (4) în final aflăm:

$$p = 7p_0\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta T}{T_0}\right) \quad \text{sau} \quad p = 7p_0\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{283}\right) \approx 7{,}124 p_0 = 7{,}124\cdot 10^5 \text{ Pa}. \qquad (18)$$

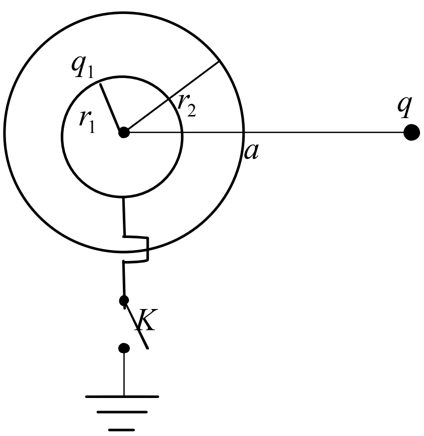
Răspuns: a) $p' = 7\cdot 10^5$ Pa; b) $M = 29{,}71\cdot 10^{-3}$ kg/mol; c) $\Delta x = -0{,}24$ m; d) $p = 7{,}124\cdot 10^5$ Pa.

Problema 3.

Pe două sfere conductoare concentrice, având razele r_1 şi r_2, se află sarcinile q_1 şi q_2. La distanţa a de la centrul sferelor se află o sarcină punctiformă q.

Să se determine sarcina ce se va scurge la pământ dupa conectarea întrerupătorului K.

Rezolvare



Potenţialul sferei r_1 este egal cu zero, deoarece sfera este unită la pământ. Să notăm cu q_x sarcina electrică care s-a scurs în pământ. Pentru $r_2 \geq r \geq r_1$ $\quad E_1 = k\frac{q_1 - q_x}{r_2} \Rightarrow$

$\varphi_1 = k\frac{q_1 - q_x}{r} + c_1$. Constanta c_1 o aflăm din condiţia

$\varphi_1(r = r_1) = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = k\frac{q_x - q_1}{r_1} \;\Rightarrow$

$\varphi_1(r) = k(q_1 - q_x)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$. Pe sfera a doua

$\varphi_1(r_2) = k(q_1 - q_x)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$. Sarcina electrică q induce pe sfera cu raza r_2 sarcină electrică

în imagine $-q' = -q\frac{r_2}{a}$, care concomitent cu sarcinaa q din exterior formează pe sfera cu raza r_2 potenţial electric nul. Conform enunţului problemei, pe sfera a doua este sarcina q_2 şi totodată, în afară de „sarcină imagine", pe această sferă trebuie înmagazinată sarcina

$q' = q\frac{r_2}{a}$, care concomitent cu sarcinile q_2, q_x şi q_1 creează

potenţialul $\varphi_2(r_2) = k\frac{q_2 + q' + q_1 - q_x}{r_2}$.

Din condiţia continuităţii potenţialului determinăm:

$$k(q_1 - q_x)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{k}{r_2}\left(q_2 + q\frac{r_2}{a} + q_1 - q_x\right) \Rightarrow q_x = q_1 + \frac{r_1}{r_2}\left(q_2 + \frac{r_2}{a}q\right)$$

Clasa a XII-a

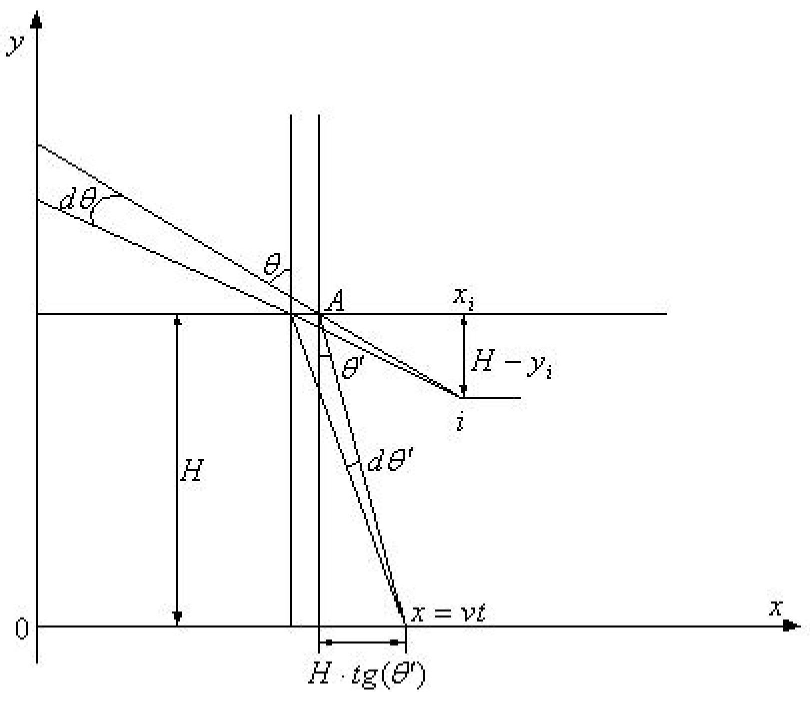
Problema 1.

Un observator stând în mare observă un crab, care se mişcă la fundul mării cu viteza v = 4 cm/s. Crabul se mişcă de-a lungul malului la o adâncime constantă H = 1 m, depărtându-se de observator pe linie dreaptă. Ochiul observatorului se află la înălţimea h de la suprafaţa mării.

Determinaţi ecuaţia traiectoriei imaginii crabului în formă parametrică luând ca parametru unghiul de refracţie Θ al razei respective.

După aceasta observatorul ajunge crabul din urmă şi-l priveşte perpendicular, înclinându-se deasupra apei. El observă că imaginea crabului se mişcă cu acceleraţie. Considerând că acceleraţia a = 0,3 cm/s^2, să se determine indicele de refracţie al apei.

Rezolvare



Coordonata crabului este $x = vt$. Raza de lumină trece prin punctul A si se refractă la frontiera de separare aer/apa. θ' - unghiul de incidenţă, θ - unghiul de refracţie

$$\sin\theta = n\sin\theta'$$

n - indicele de refracţie al apei. Coordonata punctului $x_A = x - H \cdot tg\theta'$. A doua rază cade sub unghiul $\theta' + d\theta'$ şi se refractă sub unghiul $\theta + d\theta$. Intersecţia acestor raze ne dă poziţia imaginii crabului i. După cum se vede în imagine:

$$x_i = x_A + (H - y_i)\cdot tg\theta = vt - H\cdot tg\theta' + (H - y_i)\cdot tg\theta$$

Pentru aceste două raze $dx_i = dy_i = 0 \Rightarrow$

$$H\frac{d\theta'}{\cos^2\theta'} = (H - y_i)\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \quad \Rightarrow \quad y_i = H\left(1 - \frac{n^2\cos^3\theta}{(n^2 - \sin^2\theta)^{3/2}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$x_i = vt - H(n^2 - 1)\frac{\sin^3\theta}{(n^2 - \sin^2\theta)^{3/2}}$$

Folosind relaţia $x_A = h \cdot tg\theta = vt - H\frac{\sin\theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}$ eliminăm t. În final obţinem:

$$x_i = h \cdot tg\theta + H\frac{n^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(n^2 - \sin^2\theta)^{3/2}} \qquad t = \frac{H}{v}\sin\theta\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} + \frac{h}{H\cos\theta}\right)$$

Pentru $h \to 0$ şi $\theta \to 0$ găsim $t \cong H\theta / nv$, $x_i \cong vt - H\frac{n^2 - 1}{n^3}\theta^3$

$$x_i = vt - H(n^2 - 1)\left(\frac{vt}{H}\right)^3$$ $\Rightarrow$ $a_x \to 0$ pentru $t \to 0$. În aceeaşi aproximare

$$y_i = H\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2}\cdot\frac{n^2 - 1}{n^3}\left(\frac{nvt}{H}\right)^2\right) \quad \Rightarrow \quad a_y = 3H\frac{n^2 - 1}{n}\cdot\frac{v^2}{H^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{n^2 - 1}{n} = \frac{aH}{3v^2} = \frac{5}{8}$$

$$n = \frac{5}{16}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{16}{5}\right)^2}\right) = 1{,}36$$

Raspuns:

$$x_i = h \cdot tg\theta + H\frac{n^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(n^2 - \sin^2\theta)^{3/2}}; \qquad y_i = H\left(1 - \frac{n^2\cos^3\theta}{(n^2 - \sin^2\theta)^{3/2}}\right);$$

$$t = \frac{H}{v}\sin\theta\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} + \frac{h}{H\cos\theta}\right); \quad n = \frac{aH}{6v^2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{6v^2}{aH}\right)^2}\right) = 1{,}36.$$

Autor: Alexandr Cliucanov

Problema 2.

Dintr-o sârmă omogenă izolată a fost confecţionat un inel cu diametrul d. Apoi el a fost îndoit sub forma cifrei opt (vezi fig.) astfel, încât s-a obţinut ca raportul diametrelor celor două inele formate să fie $d_2/d_1 = k$, după care s-au plasat înntr-un câmp magnetic omogen de inducţie B, orientat perpendicular pe planul inelelor. Vă propunem următoarele:

a). Determinaţi, ce tensiune U apare la „capetele" inelelor, dacă inducţia B va fi micşorată uniform până la zero în intervalul de timp Δt.

b). Trasaţi graficul dependenţei $U(k)$.

c). Pentru care k tensiunea U este maximă?

d).Cu ce este egală U_{max}?

Rezolvare

În situaţia dată inelele pot fi privite ca un circuit închis (vezi schema), în care prin R_1 şi R_2 vom nota rezistenţele celor două inele, iar prin ε_1 şi ε_2 , respectiv, TEM induse în ele. Conform legii lui Ohm:

$$I = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_1 + R_2},$$

Tensiunea între punctele ***A*** şi ***B*** este

$$U = \varepsilon_2 - IR_2.$$

Conform legii inducţiei electromagnetice, TEM indusă este

$$\varepsilon_1 = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = \frac{\pi d_1^2}{4}\frac{B}{\Delta t}, \text{ iar } \varepsilon_2 = -\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = \frac{\pi d_2^2}{4}\frac{B}{\Delta t}.$$

Obţinem:

$$U = \frac{\pi B}{4\Delta t}\left(d_2^2 - \frac{(d_2^2 - d_1^2)R_2}{R_1 + R_2}\right).$$

Evident: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{R_2}{R_1} = k$, şi $d_1 + d_2 = d$

Deci, în final obţinem rezultatul: $U = \frac{\pi B d^2}{4\Delta t}\frac{k}{(1+k)^2}$.

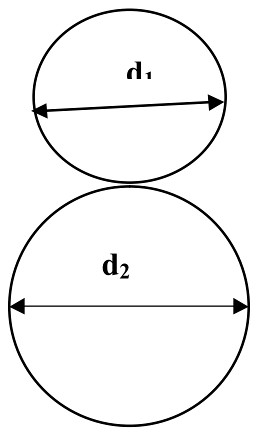
Observăm că în cazul dat *U* depinde de *k*.

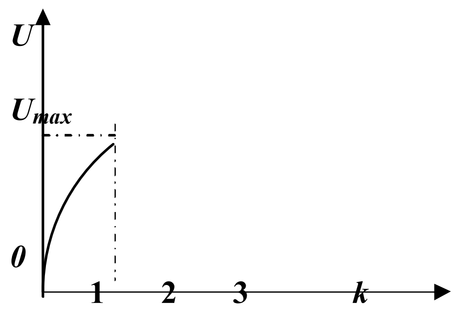
De asemenea, observăm că pentru $k < 1$, *U* va creşte mai repede decât pentru $k > 1$.

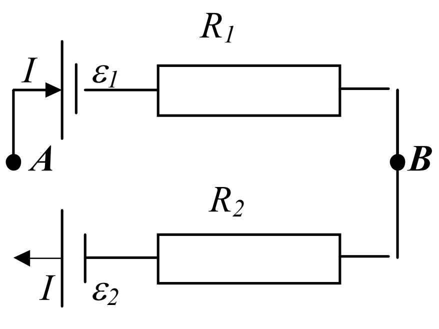
Graficul dependenţei *U (κ)* va avea forma din figura alăturată.

Atât din formula finală, cât şi din grafic se observă că tensiunea are valoarea maximă pentru $k = 1$.

Deci $U_{\max} = \frac{\pi B d^2}{16\Delta t}$.







Autor V. Pagînu

Problema 3. POLUAREA ŞI MODIFICAREA TEMPERATURII MEDIULUI FLUID

Mişcarea impurităţilor în apă guvernează multe procese din lumea fluidului acvatic, inclusiv dispersia poluanţilor din apă. Dacă mediul fluid este *stabil*, atunci mişcarea verticală este restricţionată şi poluanţii din apă tind să se acumuleze în jurul locului de emisie, mai degrabă decât să se disperseze şi să dilueze. În acest timp, în mediul fluid *instabil* mişcarea verticală a apei încurajează dispersia verticală a poluanţilor din apă. Prin urmare, concentraţia de poluanţi - numiţi în problemă impurităţi depinde nu numai de intensitatea de emisie a surselor, dar şi de stabilitatea mediului fluid.

Vei determina stabilitatea mediului fluid, folosind conceptul de pachet de aer/apă din meteorologie şi comparând temperatura pachetului de fluid, care se ridică sau care se coboară adiabatic în mediul fluid, cu cea a fluidului înconjurător. Vei vedea că în multe cazuri un pachet de fluid care conţine poluanţi şi se ridică de la suprafaţa pământului, ajunge în repaus la o anumită altitudine, numită *înălţime de amestec*. Cu cât este mai mare înălţimea/adâncimea de amestec, cu atât este mai scăzută concentraţia de poluant în aer/apă. Dacă este necesar se pot folosi următoarele date:

Constanta universală a gazelor R=8,31 J/(mol⋅K).
Presiunea atmosferică la nivelul pământului p_0 = 101,3 kPa.
Acceleraţia gravitaţională g = 9,81 m/s^2.

Sugestie matematică:

a. $\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B}\int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B}\ln(A+Bx)$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

c.

x	e	2	3	4	1000	2000	3000	4000
ln$x$	1	0,693	1,098	1,386	6,907	7,600	8,006	8,294

SUBIECT

Într-un lac cu adâncimea H=4 m plutesc impurităţi de formă sferică cu dimensiunea medie $d \approx$ 0,24 µm, iar densitatea este cu $\Delta\rho$=0,11 mg/cm^3 mai mare decât densitatea apei. Temperatura apei creşte liniar de la t_1 = 20^{o}C la fundul lacului până la t_2 = 28^{o}C la suprafaţa apei. Câmpul gravitaţional este omogen.

1. Calculează volumul mediu al unei impurităţi.

2. Care este temperatura absolută a apei la fundul lacului şi la suprafaţa apei?

3. Obţine expresia analitică a temperaturii $T(h)$ cu adâncimea. Trasează graficul $T(h)$. Variaţia temperaturii apei cu adâncimea este definită $dT_{pachet}/dz = -\Gamma$. Determină expresia lui $\Gamma(T, T_{pachet})$.

4. Consideră sistemul acvatic ca model al atmosferei izoterme standard şi presupune că temperatura atmosferei este uniformă şi egală cu temperatura apei care este uniformă şi egală cu $T(H/2)$.

Dedu expresia lui $T(H/2)$.
Calculează valoarea numerică a lui $T(H/2)$.
Determină expresia presiunii hidrostatice $p(h)$, ca funcţie de adâncime.

Determină expresia concentraţiei $n(h)$, ca funcţie de adâncime.

Calculează forţa care acţionează asupra unei impurităţi dacă concentraţia impurităţilor diferă de 2 ori pentru două adâncimi distanţate la Δh = 4,00 cm dealungul câmpului.

Calculează constanta lui Avogadro folosind datele problemei dacă numărul mediu al impurităţilor de la suprafaţa apei şi de la fundul lacului diferă respectiv de η = 2000 ori.

5. Consideră sistemul acvatic ca model al atmosferei standard şi presupune că temperatura atmosferei variază cu altitudinea conform relaţiei $T(z)=T(0)-\lambda z$, unde λ este o constantă, denumită viteza de descreştere a temperaturii atmosferei (gradientul vertical al temperaturii este $-\lambda$).

5.1. Determină expresia presiunii atmosferice $p(z)$ ca funcţie de altitudine.

5.2. Determină expresia concentraţiei $n(h)$ a impurităţilor ca funcţie de adâncime.

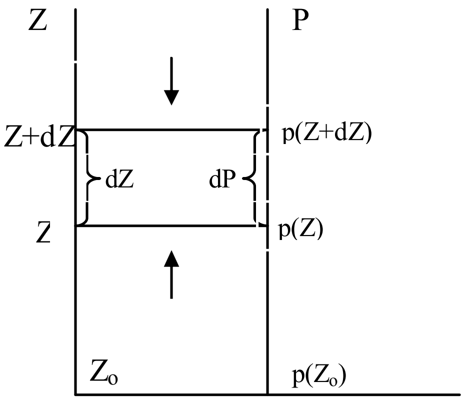
Rezolvare

Moleculele gazului se află în câmpul gravitaţional al Pământului. Dacă mişcarea termică ($E = kT$) a moleculelor aerului atmosferic n-ar fi existat, toate ar fi căzut pe Pământ, iar lipsa câmpului gravitaţional ar conduce la împrăştierea particulelor în tot Universul.

$$F = G \cdot \frac{m_0 \cdot M_P}{(R+Z)^2}$$

Efectele concomitente ale câmpului gravitaţional şi energiei termice conduc la o stare a atmosferei unde, odată cu creşterea înălţimii Z, concentraţia şi presiunea gazului scad:

$p \sim n$; $p \sim KT$; => $p = nKT$;



Să stabilim legea variaţiei presiunii gazului în dependenţă de înălţime: $p(Z) = ?$

Vom considera $T = const$ (temperatura este peste tot aceeaşi). Alegem o coloană de gaz la o anumită înălţime, având aria bazei egală cu unitatea.

De aici: $dp = p(Z) - p(Z + dZ)$.

Diferenţa presiunilor $p(Z)$ şi $p(Z + dZ)$ exercitate la înălţimile Z şi $Z + dZ$ este egală cu presiunea hidrostatică: $-dp = \rho g dZ$ sau $dp = -\rho g dZ$.

Din ecuaţia de stare a gazului ideal

$$\rho = \frac{pM}{RT}$$

Atunci, relaţia pentru presiunea hidrostatică va avea forma:

$$dp = -\frac{PM}{RT} \cdot gdZ$$

Dacă integrăm această expresie, vom obţine:

$$\ln \frac{p(Z)}{p(Z_0)} = -\frac{Mg}{RT}(Z - Z_0).$$

De aici:

$$p(Z) = p(Z_0) \cdot e^{-\frac{Mg}{RT} \cdot (Z - Z_0)}$$

În modelul atmosferei izoterme ($n = p/(kT)$), pentru concentraţie obţinem:

$$n(Z) = n(Z_0) \cdot e^{-\frac{Mg}{RT} \cdot (Z - Z_0)} = n(Z_0) \cdot e^{-\frac{mg}{kT} \cdot (Z - Z_0)} = n(Z_0) \cdot e^{-\frac{U((Z) - U((Z_0)}{kT}}$$

N.B. Formula barometrică completă este:

$$p(Z) = p(Z_0) \cdot e^{-\int_{Z_0}^{Z} \frac{Mg}{RT} \cdot dZ}, \text{ respectiv } n(Z) = n(Z_0) \cdot e^{-\int_{Z_0}^{Z} \frac{Mg}{RT} \cdot dZ}$$

Pentru atmosfera standard a fost dedusă formula de variaţie a presiunii atmosferice în funcţie de înălţimea h, folosind ipoteza că echilibrul aerului atmosferic este politropic cu exponentul n =1,235. Relaţia de echilibrul politropic este:

$$p = p_o \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\rho_o \cdot g \cdot h}{p_o}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 101 \cdot \left(1 - 0{,}2257 \cdot 10^{-4} \cdot h\right)^{5{,}2553}, \text{ unde } [p] = kN/m^2, [h] = m$$

În figura 1 este reprezentată variaţia concentraţiei şi temperaturii *atmosferei standard* cu înălţimea:

4.5. Pentru două adâncimi diferite, scriem distribuţia concentraţiei impurităţilor folosind modelul atmosferei izoterme:

$$n(Z_1) = n_1 = n(Z_0) \cdot e^{-\frac{U(Z_1) - U(Z_o)}{k \cdot T}},$$

$$n(Z_2) = n_2 = n(Z_0) \cdot e^{-\frac{U(Z_2) - U(Z_o)}{k \cdot T}}.$$

$$\vec{F} = -\frac{dU(\vec{r})}{dr}, \int_{U_1}^{U_2} dU = -\int_{Z_1}^{Z_2} F_z \cdot dZ = \int_{Z_1}^{Z_2} F \cdot dZ = F \cdot (Z_2 - Z_1), \text{ astfel}$$

$$U(Z_2) - U(Z_1) = F(Z_2 - Z_1) = F \cdot \Delta h.$$

$$\eta = \frac{n_1}{n_2} = e^{\frac{U(Z_2) - U(Z_1)}{k \cdot T}} = e^{\frac{F \cdot \Delta h}{k \cdot T}}, \text{ unde } T = T(H/2) = 297\ {}^0K$$

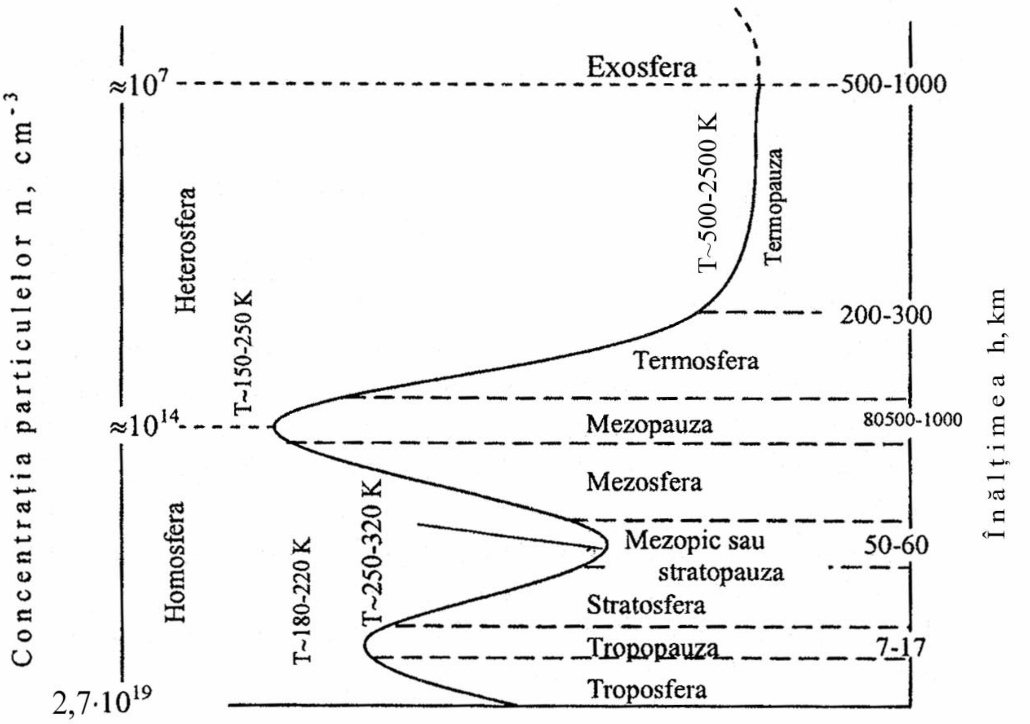


Figura 1. Variaţia concentraţiei şi temperaturii *atmosferei standard* cu înălţimea.

Logaritmăm ultima formulă şi pentru forţă obţinem expresia: $F = \dfrac{k \cdot T(H/2)}{\Delta h} \cdot \ln \eta$

Calcule numerice:

$$F = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1} \cdot 297 K}{4{,}00 \cdot 10^{-2}} \cdot \ln 2 = 7{,}10 \cdot 10^{-20} N$$

4.6. În modelul atmosferei izoterme procedăm ca în p.4.5:

$$n(Z_1) = n_1 = n(Z_0) \cdot e^{-\frac{U(Z_1) - U(Z_o)}{k \cdot T}},$$

$$n(Z_2) = n_2 = n(Z_0) \cdot e^{-\frac{U(Z_2) - U(Z_o)}{k \cdot T}}.$$

$$\vec{F} = -\frac{dU(\vec{r})}{dr}, \ \int_{U_1}^{U_2} dU = -\int_{Z_1}^{Z_2} F_z \cdot dZ = \int_{Z_1}^{Z_2} F \cdot dZ = F \cdot (Z_2 - Z_1), \text{ astfel}$$

$$U(Z_2) - U(Z_1) = F(Z_2 - Z_1) = F \cdot \Delta h = V \cdot (\rho - \rho_0) \cdot g \cdot H = V \cdot \Delta\rho \cdot g \cdot H.$$

$\eta = \dfrac{n_1}{n_2} = e^{\frac{U(Z_2) - U(Z_1)}{k \cdot T}} = e^{\frac{V \cdot (\rho - \rho_0) \cdot g \cdot H}{k \cdot T}} = e^{\frac{V \cdot \Delta\rho \cdot g \cdot H}{k \cdot T}}$, unde $T = T(H/2) = 297\ {}^0K$, V şi ρ este volumul şi densitatea impurităţii, iar ρ_0- densitatea apei.

Din ultima formulă determinăm constanta lui Boltzman:

$k = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot \Delta\rho \cdot g \cdot H}{6 \cdot T \cdot \ln\eta}$.

Folosind constanta universală a gazelor, pentru constanta lui Avogadro obţinem

$N_A = \frac{6 \cdot R \cdot T(H/2) \cdot \ln\eta}{\pi \cdot d^3 \cdot \Delta\rho \cdot g \cdot H}$

Calcule numerice:

$$N_A = \frac{6 \cdot 8{,}31 \cdot 297 \cdot \ln 2000}{3{,}14 \cdot (0{,}24 \cdot 10^{-6})^3 \cdot 0{,}11 \cdot 9{,}81 \cdot 4} = 6{,}02 \cdot 10^{23} \left(mol^{-1}\right).$$

5. În modelul atmosferei neizotrope folosim formula barometrică generală:

$p(Z) = p(Z_0) \cdot e^{-\int_{Z_0}^{Z} \frac{Mg}{RT(Z)} \cdot dZ}$, unde $T(Z) = T(0) - \lambda \cdot Z$, pentru comoditate se consideră Z_0=0.

Calculăm integrala din exponenţial:

$$\int_{Z_0}^{Z} \frac{M \cdot g}{R \cdot T(Z)} dZ = \frac{m \cdot g}{k} \int_{Z_0}^{Z} \frac{dZ}{T(0) - \lambda \cdot Z} = \frac{m \cdot g}{k} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \int_{Z_0}^{Z} \frac{d(T(0) - \lambda \cdot Z)}{T(0) - \lambda \cdot Z} = -\frac{m \cdot g}{\lambda \cdot k} \cdot \ln \frac{T(0) - \lambda \cdot Z}{T(0) - \lambda \cdot Z_0} =$$

$= -\ln \left[\frac{T(0) - \lambda \cdot Z}{T(0) - \lambda \cdot Z_0}\right]^{\frac{mg}{\lambda k}}$. Substituind rezultatul integralei în *p(Z)*, obţinem

$p(Z) = p(Z_0) \cdot \left[\frac{T(0) - \lambda \cdot Z}{T(0) - \lambda \cdot Z_0}\right]^{\frac{mg}{\lambda k}}$, unde Z_0=0, sau $p(Z) = p_0 \cdot \left[1 - \frac{\lambda \cdot Z}{T(0)}\right]^{\frac{mg}{\lambda k}}$

Metoda II.

În modelul atmosferei izoterme formate din particule cu masa m^*, unde

$m^* = (m \cdot g - F_A)/g = (\rho - \rho_0) \cdot V = \Delta\rho \cdot V$, iar $V = \frac{\pi \cdot d^3}{6}$ este volumul impurităţii.

Folosim formula barometrică pentru atmosfera izotermică:

$p(Z) = p_0 \cdot e^{-\frac{Mgz}{RT}}$ sau $n(Z) = n_0 \cdot e^{-\frac{Mgz}{RT}}$, unde $M = m^* \cdot N_A$

În modelul atmosferei izoterme, scriem concentraţia pentru două nivele:

$n_1 = n_0 \cdot e^{-\frac{N_A \cdot m^* \cdot g \cdot Z_1}{k \cdot T}}$,

$n_2 = n_0 \cdot e^{-\frac{N_A \cdot m^* \cdot g \cdot Z_2}{k \cdot T}}$, $\eta = \frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{N_A \cdot m^* \cdot g_1}{k \cdot T}(Z_1 - Z_2)}$, $\ln\eta = \frac{N_A \cdot m^* \cdot g \cdot h}{R \cdot T}$, unde $m^* = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot \Delta\rho}{6}$.

Astfel, pentru constanta lui Avogadro obţinem: $N_A = \frac{6 \cdot R \cdot T(H/2) \cdot \ln\eta}{\pi \cdot d^3 \cdot \Delta\rho \cdot g \cdot H}$.

Autor: Evtodiev Igor