

CZU: [530.1+531.391] (076)

EFFECTUL BISTABILITĂȚII ÎN MECANICĂ

Conf. univ. dr. Vitalie CHISTOL

Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, chistolvitalie@yahoo.com

Rezumat. În lucrare sunt analizate două exemple de manifestare a fenomenului de bistabilitate în procesele din mecanică. Sunt analizate și explicate cauzele și efectele fizice care stau la baza acestui fenomen.

Cuvinte cheie: bistabilitate, mecanică, bucla de histerezis.

Abstract. In the paper two cases of bistability effect in mechanical processes are considered. The physical reasons leading to this effect are analyzed and explained.

Keywords: bistability, mechanics, hysteresis loop.

Efectul bistabilității constă în existența a două stări stabile ale unui sistem pentru una și aceeași valoare a unui parametru exterior. Fenomenul bistabilității este binecunoscut în optică (bistabilitate optică), magnetism (bistabilitate magnetică), electricitate (circuite bistabile) etc. În majoritatea cazurilor acest efect e de natură cuantică și este dificil de explicat în limitele programei de liceu. În cele ce urmează, vom analiza două cazuri în care efectul bistabilității se manifestă în procesele din mecanică și explicația acestuia este relativ simplă și se încadrează în limitele programei școlare.

Problema 1. Fie un cilindru orizontal închis la ambele capete în care se află un piston de masă m care poate să lunece fără frecări de-a lungul cilindrului. De ambele părți ale pistonului se află aer la presiunea p_0 . Distanțele de la piston până la capetele cilindrului sunt l_1 și l_2 (fig.1). Să se determine viteza unghiulară cu care trebuie rotit cilindrul în jurul unei axe verticale ce trece printr-un capăt al său, pentru ca deplasarea pistonului de la poziția de echilibru să fie egală cu x .

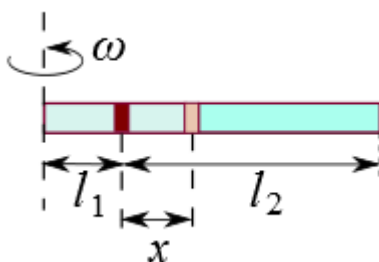


Fig.1

Pentru aceasta aflăm forțele care acționează asupra pistonului. Aerul din cilindru acționează asupra lui cu două forțe, a căror rezultantă este $F_1 = (p_2 - p_1)S$, (1) unde p_1 și p_2 sunt presiunile exercitate de aer asupra pistonului în timpul rotației; S este aria secțiunii transversale a cilindrului.

Considerând că aerul de ambele părți ale cilindrului este supus unui proces izotermic, avem $p_0 l_1 S = p_1 (l_1 + x) S$, $p_0 l_2 S = p_2 (l_2 - x) S$.

Exprimând p_1 și p_2 din ultimele expresii și introducându-le în (1), obținem

$$F_1 = \left(\frac{p_0 l_2}{l_2 - x} - \frac{p_0 l_1}{l_1 + x} \right) S. \quad (2)$$

Forța care imprimă pistonului o accelerație centripetă este $F_2 = m\omega^2(l_1 + x)$. (3)

Este evident ca pistonul se va afla în echilibru în cazul când $F_1 = F_2$ și astfel

$$\left(\frac{p_0 l_2}{l_2 - x} - \frac{p_0 l_1}{l_1 + x} \right) S = m\omega^2(l_1 + x), \text{ de unde obținem: } \omega = \sqrt{\frac{l_2(l_1 + x) - l_1(l_2 - x)}{m(l_2 - x)(l_1 + x)^2}} p_0 S. \quad (4)$$

Din această expresie se vede că pentru fiecare valoare a lui $x < l_2$ se obține o singură valoare a lui ω . S-ar părea că și pentru diferite valori ale vitezei de rotație se poate obține orice valoare a poziției de echilibru x . În realitate, graficul dependenței $x = f(\omega)$ (fig. 2) arată că lucrurile stau altfel.

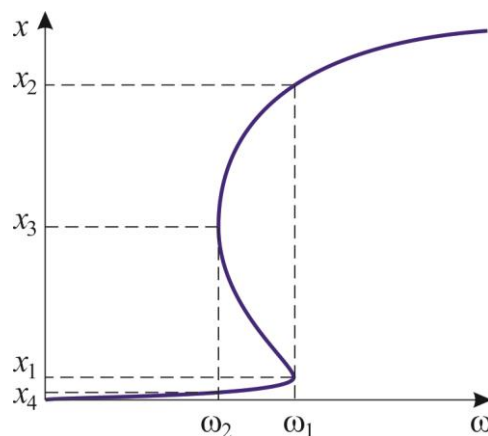


Fig. 2

Din figura 2 se vede că deplasarea pistonului crește odată cu creșterea vitezei de rotație și la viteza $\omega = \omega_1$ pistonul trece în salt din poziția $x = x_1$ în poziția $x = x_2$. Când se reduce viteza de rotație, se micșorează și x , iar la valoarea $\omega = \omega_2$ pistonul trece iarăși în salt din poziția $x = x_3$ în poziția $x = x_4$. Deci, *pistonul nu se poate afla în poziții din intervalul $x_1 < x < x_3$!* Acest fenomen este analogic cu efectul de bistabilitate din fizica cuantică.

Pentru a explica efectul obținut, trasăm graficele dependenței $F(x)$ (fig.3 după (2) (curba 1) și după (3) (dreptele 2, 3, 4). Observăm ca panta dreptelor 2, 3, 4 depinde de viteza de rotație a cilindrilor. Din fig.3 se vede că la o anumită viteză de rotație (dreapta 2) există trei stări de echilibru ale pistonului: $x = x_4$, $x = x_5$ și $x = x_6$. În stările $x = x_4$ și $x = x_6$ echilibrul pistonului este stabil, iar în starea $x = x_5$ – instabil. Pistonul se va afla în echilibru în starea $x = x_4$. Mărind viteza de rotație, panta dreptei crește și la $\omega = \omega_1$ (dreapta 3) pistonul va avea doar două poziții de echilibru: $x = x_1$ (echilibru metastabil [1]) și $x = x_2$ (echilibru stabil).

Pistonul se va afla în echilibru metastabil în poziția $x = x_1$. La o mică creștere a vitezei de rotație, pistonul trece în salt în poziția $x = x_2$. Odată cu creșterea în continuare a vitezei de rotație, crește și valoarea lui x . Dacă reducem viteza de rotație, se micșorează și x . La $\omega = \omega_2$ (dreapta 4) pistonul ajunge în poziția metastabilă $x = x_3$.

La o mică reducere a vitezei de rotație, pistonul trece în salt în poziția $x = x_4$. Astfel, dacă în enunțul problemei se va da o valoare a lui x din intervalul $x_1 < x < x_3$, atunci din expresia (4) se va putea calcula viteza de rotație pe care trebuie să o poseze cilindrul pentru ca pistonul să ocupe o astfel de poziție, însă acest rezultat este greșit, deoarece în intervalul respectiv pistonul nu se poate afla în starea de echilibru.

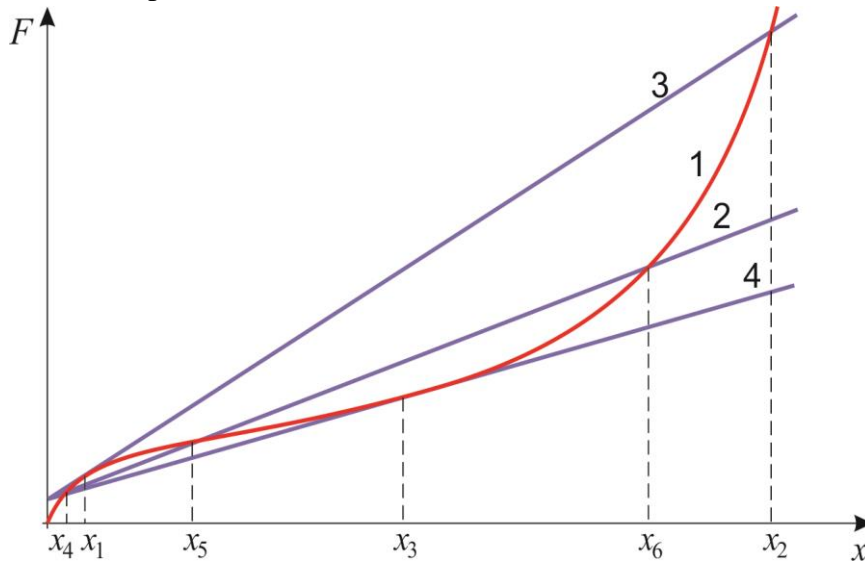


Fig. 3

Remarcăm faptul că trecerea pistonului dintr-o stare de echilibru în alta are loc la o viteză de rotație ω_1 , iar revenirea are loc la o viteză de rotație $\omega_2 < \omega_1$. Deci, în dependența $x = f(\omega)$ se obține o buclă de histerezis (fig.4).

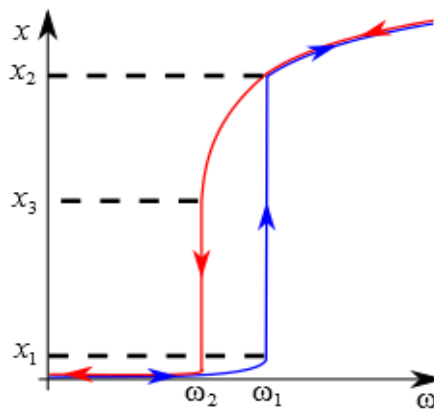


Fig.4

O situație asemănătoare cu cea de mai sus avem și în problema următoare.

Problema 2. Considerăm un tub închis la un capăt de forma indicată în fig.5a, în care se află o coloană de aer de înălțime x_0 , separată de atmosferă printr-o coloană de mercur de înălțime H . Temperatura aerului din tub este T_0 . Ariile secțiunilor transversale ale tubului sunt S_1 și S_2 . Presiunea atmosferică exprimată în milimetri ai coloanei de mercur este H_0 . Se cere a se trasa graficul deplasării suprafeței inferioare a coloanei de mercur în funcție de temperatura aerului din tub.

Aplicând ecuația transformării generale a gazului ideal pentru aerul din tub, obținem:

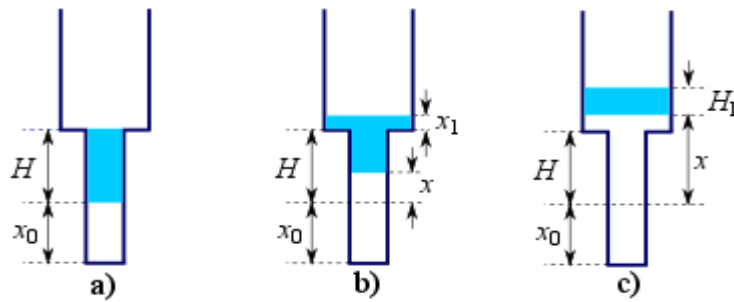


Fig.5

$$\frac{pV}{T_0} = \frac{p_1V_1}{T}, \quad (5) \text{ unde: } p = \rho g(H + H_0), \quad V = S_1x_0, \text{ iar } p_1 \text{ și } V_1 \text{ pentru } x \leq H \text{ sunt:}$$

$$p_1 = \rho g(H - x + x_1 + H_0); \quad V_1 = S_1(x_0 + x).$$

$$\text{Din fig. 5b avem: } S_1x = S_2x_1 \text{ sau } x_1 = \frac{S_1}{S_2}x = kx, \text{ unde } k = \frac{S_1}{S_2}.$$

Deci, $p_1 = \rho g(H + H_0 - (1-k)x)$ și din (5) obținem:

$$\frac{\rho g(H + H_0)S_1x_0}{T_0} = \frac{\rho g(H + H_0 - (1-k)x)S_1(x_0 + x)}{T}.$$

$$\text{De aici rezultă: } T = T_0 \frac{(H + H_0 - (1-k)x)(x_0 + x)}{(H + H_0)x_0}. \quad (6)$$

Pentru $x > H$ avem (fig. 5c): $V_1 = S_1(H + x_0) + S_2(x - H)$

$$p_1 = \rho g(H_0 + H_1) = \rho g(H_0 + kH).$$

$$\text{Introducând } V_1 \text{ în (5), obținem: } T = T_0 \frac{\rho g(H_0 + kH)[S_1(H + x_0) + S_2(x - H)]}{\rho g(H_0 + H)S_1x_0},$$

$$\hat{\text{În urma unor transformări obținem: }} T = T_0 \frac{(H_0 + kH)[H + x_0 + 1/k(x - H)]}{(H_0 + H)x_0}. \quad (6a)$$

Trasăm graficul dependenței $x = f(T)$ după expresia (6) (fig. 6, curba 1) și după (6a) (fig. 6, dreapta 2).

Din figură se vede că la temperatura T' deplasarea suprafeței inferioare a mercurului este x' . Pentru $T > T'$ ecuația (6) nu are soluții. Aceasta înseamnă că la $T > T'$ tot mercurul din tubul cu aria S_1 trece în salt în tubul de arie S_2 , iar deplasarea mercurului va fi $x > x_2$.

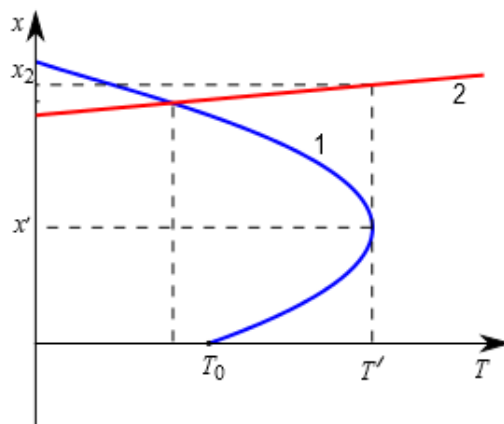


Fig. 6

Pentru a explica acest salt, vom cerceta echilibrul suprafeței inferioare a mercurului. Asupra acestei suprafețe mercurul exercită presiunea p_1 și aerul din tub presiunea p_2 . Mercurul se află în echilibru atunci când aceste presiuni sunt egale. Presiunile p_1 și p_2 au

$$\text{valorile: } p_1 = \begin{cases} \rho g (H_0 + H - x) & \text{pentru } x \leq H \\ \rho g (H_0 + H_1) = \rho g (H_0 + kH) & \text{pentru } x > H \end{cases}, \quad (7)$$

$$p_2 = \frac{\nu RT}{S_1(x_0 + x)} \quad \text{pentru } x \leq H. \quad (8)$$

Trasăm graficul funcțiilor $p_1(x)$ și $p_2(x)$ [2,3] (fig.7):

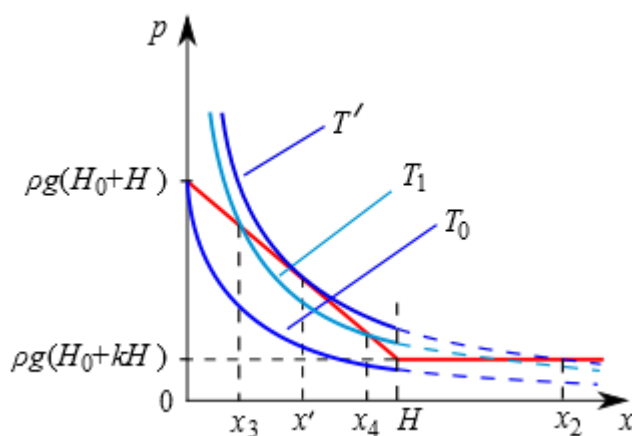


Fig. 7

Din figura 7 se vede că pentru $T = T_0$, în domeniul $x \leq H$, curba $p_2(x)$ se intersectează cu dreapta $p_1(x)$ în punctul $x=0$. Cu cât temperatura gazului este mai mare, cu atât curba $p_2(x)$ este situată mai sus. La o anumită temperatură $T = T_1$ funcțiile $p_1(x)$ și $p_2(x)$ au două puncte de intersecție în regiunea $x \leq H$: $x = x_3$ și $x = x_4$. Este evident că în punctul $x = x_3$ echilibrul mercurului este stabil, iar în punctul $x = x_4$ – instabil. La temperatura $T = T'$ funcțiile $p_1(x)$ și $p_2(x)$ au doar un singur punct de intersecție $x = x'$ în regiunea $x \leq H$ și un punct de intersecție $x = x_2$ în regiunea $x > H$. La o mică creștere a temperaturii, funcțiile $p_1(x)$ și $p_2(x)$ nu mai au puncte de intersecție în domeniul $x \leq H$ și mercurul va trece din poziția de echilibru instabil $x = x'$ într-o poziție de echilibru stabil $x > x_2$.

Graficul funcției $x = f(T)$ este reprezentat în fig. 8.

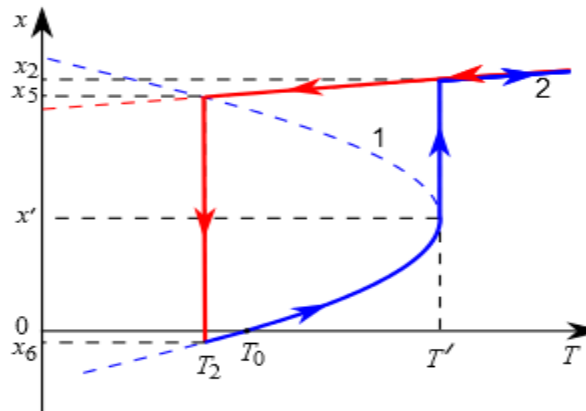


Fig. 8

Din figura 8 se vede că odată cu creșterea temperaturii, crește monoton deplasarea mercurului (curba 1). La temperatura $T = T'$ deplasarea mercurului crește în salt de la $x = x'$ la $x = x_2$. La creșterea în continuare a temperaturii, deplasarea mercurului este descrisă de expresia (9) (dreapta 2). La scăderea temperaturii, deplasarea mercurului se micșorează. La temperatura $T = T_2$ curba 1 se intersectează cu dreapta 2 și mercurul trece în salt din poziția $x = x_5$ în poziția $x = x_6$. Menționăm că temperatura T_2 poate fi mai joasă sau mai înaltă decât T_0 în dependență de valorile lui x_0 , H și k , iar valorile lui x_6 pot fi pozitive sau negative. Ca și în prima problemă, dacă se cere să se calculeze temperatură până la care trebuie încălzit aerul din tub pentru ca deplasarea mercurului să aibă o valoare cuprinsă în intervalul $x' < x < x_5$ și vom rezolva problema fără a ține cont de efectul bistabilității, vom obține un rezultat greșit.

În concluzie, efectul bistabilității poate avea loc în cazul în care există o dependență neliniară între două mărimi fizice (în cazul nostru, este vorba de deplasarea pistonului sau a coloanei de mercur în funcție de viteza de rotație sau, respectiv, de temperatură). Astfel, în cazul unor dependențe neliniare între mărimile fizice trebuie să se țină cont de efectul bistabilității pentru a evita greșelile în rezolvarea problemelor de fizică.

Bibliografie

- [1] V. Chistol, Despre aplicarea metodei grafice la rezolvarea unor probleme de fizică, *Cygnus* Nr.1(12), 2010, p. 23-27.
- [2] V. Chistol, C. Pârțac, N. Ungureanu, Aplicarea problemelor de fizică la educația tehnologică a studenților. Conferința tehnico-științifică a studenților și doctoranzilor consacrată Anului Fizicii, 17 noiembrie 2005, Chișinău, UTM, 2005, p.47-48.
- [3] В. Епштейн, От простого к сложному (De la simplu la complex), *Квант*, nr.3, 2007, p. 34-36.

Primit la redacție: 6 octombrie 2017.

Articolul este depozitat în baza de date IBN:

https://ibn.idsi.md/ro/vizualizare_numar_revista/26/2138